

Übung zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie

Tutorübung: 17. November 2008 Abgabetermin: 24. November 2008

Aufgabe 1 *Fünf-Farben-Satz* (T)

Ein Graph heißt *planar*, wenn man ihn so in die Ebene einbetten kann, dass sich keine Kanten überkreuzen. Zeigen Sie, dass jeder planare Graph mit 5 Farben gefärbt werden kann.

Aufgabe 2 *Chromatische Zahl* (H)

Sei G ein Graph mit n Knoten, $\bar{G}$ sein Komplement. Zeigen Sie, dass $\chi(G) + \chi(\bar{G}) \geq 2\sqrt{n}$.

Aufgabe 3 *Lateinische Quadrate* (H)

Eine $n \times n$ -Matrix mit Einträgen aus $\{1, 2, \dots, n\}$ heißt *Lateinisches Quadrat*, wenn jedes $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ in jeder Spalte und jeder Zeile genau einmal auftritt. Führen Sie die Konstruktion Lateinischer Quadrate auf ein Färbungsproblem zurück und zeigen Sie, dass die beiden Probleme äquivalent sind.

Aufgabe 4 *Kritische Färbungen* (H)

Ein Graph $G = (V, E)$ mit $\chi(G) = k$ heißt *kritisch k-chromatisch*, wenn durch das Entfernen einer beliebigen Kante die chromatische Zahl abnimmt, d.h. wenn $\chi(G - e) < k$ für alle $e \in E$.

- (a) Geben Sie für $k = 2, 3, \dots$ eine Familie von kritisch k -chromatischen Graphen an.
- (b) Bestimmen Sie alle kritisch 3-chromatischen Graphen.
- (c) Zeigen Sie, dass jeder k -chromatische Graph einen kritisch k -chromatischen Graphen als Teilgraphen besitzt.

Aufgabe 5 *Listenfärbung* (H)

Sei $G = (V, E)$ ein Graph, $L : V \rightarrow 2^{\mathbb{N}}$ eine Abbildung von Knoten von G auf Mengen von natürlichen Zahlen. Eine *Listenfärbung* von G gemäß L ist eine Färbung $f : V \rightarrow \cup_{v \in V} L(v)$ mit $f(v) \in L(v)$ für alle $v \in V$. (Für $v \in V$ gibt $L(v)$ also eine Menge von „erlaubten“ Farben an.) Die *listenchromatische Zahl* $\chi_l(G)$ von G ist dann die kleinste Zahl k , so dass G für jede Funktion L mit $|L(v)| = k$ für alle $v \in V$ eine gültige Listenfärbung besitzt. Zeigen Sie, dass für einen planaren Graphen G gilt: $\chi_l(G) \leq 6$.