

Übung zur Vorlesung Algorithmische Graphentheorie

Tutorübung: 8. Dezember 2008

Abgabetermin: 15. Dezember 2008

Aufgabe 1 *Satz von Gale und Shapley (T)*

Seien A und B zwei disjunkte Mengen. Für jedes Element $a \in A$ sei $\succ_a$ eine lineare Ordnung auf B , für jedes $b \in B$ sei $\succ_b$ eine lineare Ordnung auf A . Ein *stabiles Matching* zwischen A und B ist dann eine injektive Funktion $f : A \rightarrow B$, so dass keine Elemente $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$ existieren mit $f(a) = b$, $b' \succ_a b$ und $a' \succ_b a$. Zeigen Sie, dass ein stabiles Matching zwischen A und B existiert, wenn $|A| = |B|$.

Aufgabe 2 *Matchings in regulären bipartiten Graphen (H)*

- (a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass jeder bipartite k -reguläre Graph mit $k \geq 1$ ein perfektes Matching besitzt.
- (b) Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Kantenmenge jedes k -regulären bipartiten Graphen in perfekte Matchings partitioniert werden kann.

Aufgabe 3 *Matchings und Spiele auf Graphen (H)*

Zwei Spieler A und B wählen abwechselnd jeweils einen bisher noch nicht gewählten Knoten eines Graphen G . Spieler A beginnt, ab dem zweiten Zug muss der gewählte Knoten dann immer ein Nachbar des vom Gegner im vorherigen Zug gewählten Knoten sein. Ein Spieler gewinnt, wenn der andere Spieler keinen weiteren Knoten wählen kann. Betrachten Sie den Fall, in dem G ein perfektes Matching besitzt und den, in dem G kein perfektes Matching besitzt, und geben Sie jeweils eine Gewinnstrategie für einen der beiden Spieler an.

Aufgabe 4 *Online-Algorithmen für Matchings (H)*

Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph. Ein *Online-Algorithmus* zur Berechnung eines Matchings M von G erhält in jedem Schritt eine Kante $e \in E$ und muss sofort und endgültig entscheiden, ob e in M aufgenommen werden soll oder nicht.

- (a) Geben Sie einen Online-Algorithmus an, der immer ein Matching der Größe mindestens $\frac{\nu(G)}{2}$ bestimmt.
- (b) Zeigen Sie, dass kein Online-Algorithmus existiert, der immer ein Matching mit mehr als $\frac{\nu(G)}{2}$ Kanten liefert.