

Planare Graphen Grundlagen

Grapheinbettung

Definition

Eine **planare Einbettung** ist ein Paar (V, E) mit

- ▶ $V \subseteq \mathbb{R}^2$ endlich
- ▶ $e \in E$ ist ein Polygonzug in \mathbb{R}^2 mit Endpunkten in V .
- ▶ das Innere jedes $e \in E$ enthält keinen Punkt $v \in V$ und keinen Punkt eines anderen $e' \in E$.

Definition

Graph $G = (V, E)$ ist **planar**, wenn es eine Einbettung (V', E') gibt mit:

- ▶ es gibt Bijektion $i: V \rightarrow V'$
- ▶ $\{u, v\} \in E$ gdw. es $e \in E'$ gibt mit Endpunkten $i(u)$ und $i(v)$.

$\mathbb{R}^2 \setminus (V \cup E)$ ist offene Menge, zerfällt in **Gebiete**, eines davon (das **äußere**) unbeschränkt.

Lemma

- ▶ *Ist $e \in E$ in einem Polygon, so liegt e auf dem Rand von 2 Gebieten.*
- ▶ *Andernfalls liegt e auf dem Rand eines Gebietes.*

Euler'sche Polyederformel

Im Folgenden bezeichne stets:

- ▶ k die Zahl der Zusammenhangskomponenten
- ▶ f die Zahl der Gebiete

Satz

Für jede planare Einbettung gilt:

$$n - m + f = k + 1$$

Korollar

Für zusammenhängende planare Graphen gilt

$$n - m + f = 2$$

Anzahlformeln

Satz

Für jeden planaren Graphen mit $|V| \geq 3$ gilt

$$m \leq 3n - 6 \quad \text{und} \quad f \leq 2n - 4.$$

Satz

Jeder planare Graph hat mindestens 3 Knoten vom Grad ≤ 6 .

Korollar: Der mittlere Knotengrad in planaren Graphen ist < 6 .

Alle Graphen mit $|V| \leq 4$ sind planar.

Satz

Die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ sind nicht planar.

Minoren

Definition

H entsteht aus G durch **Kantenkontraktion**,
wenn $H = G/\{u, v\}$ für eine Kante $\{u, v\} \in E$.

H ist **Minor** von G ,
wenn H aus einem Subgraphen von G durch endlich viele
Kantenkontraktionen entsteht.

G ist planar gdw. alle Minoren von G planar sind.

Satz (Kuratowski 1930)

G ist planar gdw. er weder K_5 noch $K_{3,3}$ als Minor hat.

Außenplanare Graphen

Definition

G ist **außenplanar**, wenn er eine Einbettung hat, bei der alle Knoten an demselben Gebiet (obdA dem äußeren) liegen.

Lemma

Jeder außenplanare Graph hat einen Knoten v vom Grad $\deg(v) \leq 2$.

Satz

Jeder außenplanare Graph ist 3-färbbar.

Satz

G ist außenplanar gdw. er weder K_4 noch $K_{3,2}$ als Minor hat.