

Übungen zur Vorlesung Komplexitätstheorie

Blatt 3

Aufgabe P-6: Eine Menge A ist p -Turing-reduzierbar auf B , geschrieben $A \leq_p^T B$, falls $A \in P^B$ ist.

- (a) Zeigen Sie, dass diese Relation $\leq_p^T$ reflexiv und transitiv ist, also gilt:

$$A \leq_p^T A, \text{ und aus } A \leq_p^T B \text{ und } B \leq_p^T C \text{ folgt } A \leq_p^T C.$$

- (b) Offenbar folgt aus $A \leq_p B$ auch $A \leq_p^T B$. Überlegen Sie, warum die Umkehrung wahrscheinlich nicht gilt, d.h. zeigen Sie, welche Konsequenzen die Umkehrung hätte.

Aufgabe P-7: Das Problem EXACT COVER ist definiert wie folgt:

Gegeben: Eine Menge U und eine Familie $\mathcal{X} = (X_i)_{i \in \{1, \dots, k\}}$ von Teilmengen $X_i \subseteq U$.

Frage: Enthält $\mathcal{X}$ eine Partition von U , d.h. eine Teilfamilie $(X_i)_{i \in I}$ mit $I \subseteq \{1, \dots, k\}$, so dass $\bigcup_{i \in I} X_i = U$ und $X_i \cap X_j = \emptyset$ für $i, j \in I$ mit $i \neq j$.

Zeigen Sie, dass EXACT COVER NP-vollständig ist.

Hinweis: Reduzieren Sie 3-SAT auf EXACT COVER um zu zeigen, dass das Problem NP-schwer ist.

Aufgabe H-4: Die Klasse co-NP ist definiert durch $\{\bar{L} ; L \in \text{NP}\}$, wobei $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$ das Komplement von L bezeichne. Die Begriffe co-NP-schwer und co-NP-vollständig sind analog zu den entsprechenden Begriffen für NP definiert.

- (a) Zeigen Sie dass L genau dann vollständig für co-NP ist, wenn $\bar{L}$ NP-vollständig ist.
- (b) Eine aussagenlogische Formel in DNF (disjunktiver Normalform) ist eine Disjunktion $F = T_1 \vee \dots \vee T_m$ von Termen T_i . Ein Term ist eine Konjunktion $a_1 \wedge \dots \wedge a_k$ von Literalen. Das Problem TAUT ist gegeben durch

Gegeben: Formel F in DNF.

Frage: Ist F eine Tautologie ?

Eine Tautologie ist eine Formel, die unter *jeder* Variablenbelegung wahr ist.

Zeigen Sie, dass TAUT co-NP-vollständig ist.

Aufgabe H-5: In der Vorlesung wurde das Konzept der *Relativierung* von Beweisen mit Hilfe von Orakeln erläutert. Dabei wird argumentiert, dass Beweiskonzepte zur Trennung der Klassen P und NP ungeeignet sind, falls sie auch unter der Anwesenheit von Orakeln funktionieren.

- (a) Welcher Satz aus der Vorlesung ist die Grundlage für die obige Aussage?
- (b) Zeigen Sie, dass sich der Beweis des Zeithierarchiesatzes relativieren lässt. D.h. modifizieren Sie den Beweis aus der Vorlesung, so dass er die folgende stärkere Aussage beweist.

$$\text{Für alle } C \in \Sigma^* \text{ gilt } \text{TIME}^C(f(n)) \subsetneq \text{TIME}^C(n^2 \cdot f(n)^2)$$

Wobei $\text{TIME}^C(f(n)) = \{ L \in \Sigma^* \mid \text{Es gibt eine Orakel-TM } T \text{ mit } \text{TIME}_{T^C}(n) \leq f(n) \text{ und } L(T^C) = L \}$.

Abgabe der Hausaufgaben: Legen Sie Ihre Lösungen bitte bis spätestens Mittwoch, 12.11.2008, 14 Uhr in den Übungskasten vor Raum F2 in der Oettingenstr. 67. Besprechung am Mittwoch, 05.11.2008.