Konstruktive Interpretation induktiver Definitionen

Diplomarbeit von Holger Benl
am Lehrstuhl Prof. Dr. Helmut Schwichtenberg

Mathematisches Institut
Ludwig-Maximilians-Universität
München

2. Juni 1998

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die wohl bekannteste Eigenschaft der intuitionistischen Logik ist die Möglichkeit, bei geeigneter Formalisierung aus einem Beweis einer Existenzaussage $\exists x A$ einen Term t zu gewinnen, so daß $A[x \mapsto t]$ wieder beweisbar wird.
Einen besonders intuitiven Zugang zu einer Verallgemeinerung dieses Paradigmas bietet die auf Kreisel ([6]) zurückgehende mr-Interpretation in ihrer in [5] angegebenen Formulierung für HA^ω. Die so erhaltenen Terme lassen sich in offensichtlicher Weise als Programme einer funktionalen Programmiersprache (z.B. Scheme) auffassen, von denen sichergestellt ist, daß sie ihre Spezifikation (die Formel A) erfüllen. Dadurch wird die mr-Interpretation, ursprünglich ein Hilfsmittel zum Beweis metamathematischer Eigenschaften, möglicherweise zum Vorbild zukünftiger Entwicklungswerkzeuge für sicherheitsrelevante Software. Auch wenn die Beweistechniken noch kaum ausreichen, um auf diese Weise reale Problemstellungen anzugehen, wurde die prinzipielle Durchführbarkeit dieses Vorhabens doch durch einige Fallstudien mit dem Minlog-System demonstriert, siehe z.B. [1],[3].
Ziel dieser Diplomarbeit ist es, die Technik der Programmextraktion auch für Systeme induktiver Definitionen in ähnlich intuitiver Weise verfügbar zu machen. Im Mittelpunkt steht dabei nicht die theoretische Behandlung der induktiven Definitionen, da diese bereits sehr gut verstanden sind (siehe z.B. [4]), sondern die Verwendbarkeit für weitere Fallstudien in Minlog.
Die Arbeit stützt sich dabei hauptsächlich auf Artikel von Zucker ([5, S. 392 ff.]) und Berger ([2]). Zucker interpretiert eine Theorie zweifach iterierter induktiver Definitionen in einem System, das genau HA^ω, erweitert um die zweite und dritte Zahlen- (oder Baum-)klasse, entspricht. Auf ähnliche Weise werden wir HA^ω um sogenannte freie Algebren anreichern und das intuitionistische System $spID^{<\omega}$ der endlich iterierten strikt positiven induktiven Definitionen darin interpretieren.
Es existieren noch viele andere Arbeiten zur konstruktiven Interpretation induktiver Definitionen, diese bauen jedoch stets auf sehr viel ausdrucksstärkere Systeme wie System F oder Martin-Löf Typentheorie auf, wodurch sie für eine Erweiterung des auf HA^ω aufbauenden und ganz bewußt einfach gehaltenen Minlog -System nicht in Frage kommen.

Kapitel 1

Heyting Arithmetik mit induktiven Typen

Als erstes stellen wir HA^μ, eine Erweiterung von HA^ω (vgl. [5] oder [8]) um freie Algebren, das heißt Mengen von fundierten Bäumen, vor. Diese Algebren werden wir später benutzen, um die Erzeugung induktiv definierter Mengen durch Erzeugungsbäume zu formalisieren. Im Prinzip würde es ausreichen, dazu die n-ten Zahlen- oder Baumklassen $\mathcal{T}_n$ zu betrachten, wie dies auch Zucker in [5] vorgeführt hat. Allerdings führt diese Einschränkung zum Teil zu erheblichen technischen Komplikationen, weshalb wir etwas freier in der Definition unserer Algebren sind und eine Form wählen, die exakt auf die induktiven Definitionen zurechtgeschnitten ist, die wir später behandeln wollen.

1.1 Typen

Unser Typsystem wird durch zwei Bildungsprinzipien definiert: Zum einen betrachten wir die von HA^ω bekannten Pfeiltypen $\rho \to \sigma$, die für Mengen von Abbildungen vom Typ ρ in den Typ σ stehen, zum anderen verwenden wir induktiv generierte Typen: Sei dazu α ein fest gewähltes Symbol, dann schreiben wir zum Beispiel $\mu\alpha(\alpha, \alpha \to \alpha)$ für den Typ der natürlichen Zahlen, die Liste $(\alpha, \alpha \to \alpha)$ steht dabei für die zwei Generierungsprinzipien:
(α) Es gibt eine natürliche Zahl (die 0);
($\alpha \to \alpha$) Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine weitere natürliche Zahl (den Nachfolger).

Definition 1.1 *Typen $\rho, \sigma, \tau, \mu, \nu \in \mathcal{T}$ und Konstruktortypen $\kappa \in \mathcal{KT}$ werden definiert durch:*

$$\frac{\vec{\rho}, \vec{\sigma}_1, \ldots, \vec{\sigma}_n \in \mathcal{T} \quad (n \geq 0)}{\vec{\rho} \to (\vec{\sigma}_1 \to \alpha) \to \ldots \to (\vec{\sigma}_n \to \alpha) \to \alpha \in \mathcal{KT}}$$

$$\frac{\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \mathcal{KT} \quad (n \geq 1)}{\mu\alpha(\kappa_1, \ldots, \kappa_n) \in \mathcal{T}} \qquad \frac{\rho, \sigma \in \mathcal{T}}{\rho \to \sigma \in \mathcal{T}}$$

Dabei steht $\vec{\rho}$ für eine Liste $\rho_1, \ldots, \rho_n$ $(n \geq 0)$ von Typen und $\vec{\rho} \to \alpha$ für $\rho_1 \to \ldots \to \rho_n \to \alpha$, $\to$ ist stets rechtsgeklammert zu lesen. *Notation:*

- Wir verwenden μ, ν nur für Typen von der Form $\mu\alpha(\vec{\kappa})$
- Für Typen τ und Konstruktortypen $\kappa = \vec{\rho} \to (\vec{\sigma}_1 \to \alpha) \to \ldots \to (\vec{\sigma}_n \to \alpha) \to \alpha$ sei $\kappa[\tau] := \vec{\rho} \to (\vec{\sigma}_1 \to \tau) \to \ldots \to (\vec{\sigma}_n \to \tau) \to \tau$.

Beispiele:

- $\mathsf{boole} := \mu\alpha(\alpha, \alpha)$
- $\mathsf{nat} := \mu\alpha(\alpha, \alpha \to \alpha)$
- $\rho \times \sigma := \mu\alpha(\rho \to \sigma \to \alpha)$
- $\rho + \sigma := \mu\alpha(\rho \to \alpha, \sigma \to \alpha)$
- $\mathcal{O} := \mu\alpha(\alpha, \alpha \to \alpha, (\mathsf{nat} \to \alpha) \to \alpha)$
- $\mathcal{T}_0 := \mathsf{nat}, \quad \mathcal{T}_{n+1} := \mu\alpha(\alpha, (\mathcal{T}_n \to \alpha) \to \alpha)$

1.2 Terme

Als Bezeichnungssystem für die Elemente der verschiedenen Typen verwenden wir den getypten λ-Kalkül und schreiben $t : \rho$ oder auch t^ρ, falls t ein Term ist, der ein Element des Typs ρ bezeichnet. Zu jedem Typ ρ sei dazu eine unendliche Menge $\mathcal{V}^\rho$ von Variablen x^ρ gegeben, die für beliebige Elemente dieses Typs stehen, $\lambda x^\rho t^\sigma$ bezeichnet das Element von $\rho \to \sigma$, das entsteht, wenn man t in offensichtlicher Weise als Funktion in x interpretiert, $(t^{\rho\to\sigma} s^\rho)$ sei die Anwendung der durch t bezeichneten Funktion auf das durch s bezeichnete Objekt.
Die induktive Struktur eines Typs $\mu = \mu\alpha(\kappa_1, \ldots, \kappa_m)$ wird wiedergegeben durch zwei Arten von Konstanten: Mit den Konstruktoren $K_i^\mu : \kappa_i[\mu]$ $(i = 1, \ldots, m)$ können Elemente dieses Typs konstruiert werden und mit den Rekursionsoperatoren R_τ^μ können wir Abbildungen von μ nach τ durch Rekursion über die Struktur von μ definieren. Um die Typen der Rekursionsoperatoren zu einer freien Algebra $\mu = \mu\alpha(\kappa_1, \ldots, \kappa_m)$ angeben zu können, definieren wir zuerst:

$$\begin{aligned} \kappa_i = \vec{\rho} \to (\vec{\sigma}_1 \to \alpha) \to \ldots \to (\vec{\sigma}_n \to \alpha) \to \alpha \quad &\Rightarrow \\ ST_i^{\mu,\tau} := \vec{\rho} \to (\vec{\sigma}_1 \to \mu) \to \ldots \to (\vec{\sigma}_n \to \mu) \to & \\ (\vec{\sigma}_1 \to \tau) \to \ldots \to (\vec{\sigma}_n \to \tau) \to \tau & \end{aligned}$$

Dann hat der Rekursionsoperator R_τ^μ den Typ

$$RT^{\mu,\tau} := ST_1^{\mu,\tau} \to \ldots \to ST_m^{\mu,\tau} \to \mu \to \tau$$

Definition 1.2 *Terme werden wie folgt gebildet*

$$\frac{x \in \mathcal{V}^\rho}{x : \rho} \qquad \frac{}{K_i^{\mu\alpha(\vec{\kappa})} : \kappa_i[\mu\alpha(\vec{\kappa})]} \qquad \frac{}{R_\rho^\mu : RT^{\mu,\rho}}$$

$$\frac{x \in \mathcal{V}^\rho \quad t : \sigma}{\lambda x t : \rho \to \sigma} \qquad \frac{s : \rho \to \sigma \quad t : \rho}{(st) : \sigma}$$

Beispiele:

- $\mathsf{true}^{\mathsf{boole}} := K_1^{\mathsf{boole}}$, $\mathsf{false}^{\mathsf{boole}} := K_2^{\mathsf{boole}}$
- $R_\rho^{\mathsf{boole}} : \rho \to \rho \to \mathsf{boole} \to \rho$
- $0^{\mathsf{nat}} := K_1^{\mathsf{nat}}$, $S^{\mathsf{nat} \to \mathsf{nat}} := K_2^{\mathsf{nat}}$, $\underline{0} := 0^{\mathsf{nat}}$, $\underline{n+1} := S\underline{n}$
- $R_\rho^{\mathsf{nat}} : \rho \to (\mathsf{nat} \to \rho \to \rho) \to \mathsf{nat} \to \rho$
- $in_i^{\rho_i \to (\rho_1 + \rho_2)} := K_i^{\rho_1 + \rho_2}$
- $R_\sigma^{\rho_1 + \rho_2} : (\rho_1 \to \sigma) \to (\rho_2 \to \sigma) \to (\rho_1 + \rho_2) \to \sigma$
- $\langle s^{\rho_1}, t^{\rho_2} \rangle^{\rho_1 \times \rho_2} := K_1^{\rho_1 \times \rho_2} st$
- $\pi_i^{(\rho_1 \times \rho_2) \to \rho_i} := R_{\rho_i}^{\rho_1 \times \rho_2} \lambda x_1^{\rho_1}, x_2^{\rho_2} x_i$

Um mit einem Konstruktor neue Elemente eines μ-Typs zu bilden, muß dieser Typ im allgemeinen schon mindestens ein Element enthalten, nur wenn κ_i von der Form $\vec{\rho} \to \alpha$ ist, kann man mit K_i^μ Elemente konstruieren, ohne auf andere Elemente desselben Typs zurückgreifen zu müssen. Ist andererseits keiner der an der Bildung einer Algebra beteiligten Konstruktortypen $\vec{\kappa}$ von dieser Form, so erhält man unter Umständen einen Typ, zu dem kein geschlossener Term angegeben werden kann (einfachstes Beispiel: $\mu\alpha(\alpha \to \alpha)$). Da wir die geschlossenen Terme später zur Modellkonstruktion verwenden wollen, fordern wir bei der Bildung eines Typs $\mu\alpha(\vec{\kappa})$, daß mindestens einer der Konstruktortypen κ_i von der Form $\vec{\rho} \to \alpha$ sein muß.

Notation:

- Wir verwenden x, y, z, u, v, w, f, g als Platzhalter für Variablen, p, q, r, s, t für Terme und c für Konstanten, also Konstruktoren und Rekursionsoperatoren.
- Wir werden die Typangaben im folgenden meist unterdrücken, wenn sich der Typ aus dem Kontext rekonstruieren lässt.
- Außerdem werden wir zur Verbesserung der Lesbarkeit die Klammern meist weglassen, Mehrfachanwendungen sind dabei stets linksgeklammert zu lesen und ein Punkt hinter der Variable in einem λ-Ausdruck bedeutet, daß sich der Geltungsbereich des λ-Operators so weit wie möglich nach rechts erstreckt, also steht zum Beispiel $t(\lambda x.pqr)s$ für $((t\, \lambda x((pq)r))s)$.
- Sei $\mu = \mu\alpha(\vec{\kappa})$,$\kappa_i = \rho_1 \to \ldots \to \rho_m \to (\vec{\sigma}_1 \to \alpha) \to \ldots \to (\vec{\sigma}_n \to \alpha) \to \alpha$ und $t^\mu = K_i^\mu \vec{s}$. Dann steht $\vec{s}^P = s_1^P, \ldots, s_m^P$ für die Parameterargumente $s_1^{\rho_1}, \ldots, s_m^{\rho_m}$ von t und $\vec{s}^R = s_1^R, \ldots, s_n^R$ für die rekursiven Argumente $s_{m+1}^{\vec{\sigma}_1 \to \mu}, \ldots, s_{m+n}^{\vec{\sigma}_n \to \mu}$ von t, $n^R = n$ sei die Anzahl der rekursiven Argumente.

Definition 1.3 *Die freien Variablen $FV(t)$ eines Terms t werden wie folgt definiert:*

- $FV(x) := \{x\}$
- $FV(c) := \{\}$
- $FV(\lambda xt) := FV(t) \setminus \{x\}$
- $FV(st) := FV(s) \cup FV(t)$

1.2.1 Substitution

Da Variablen als Platzhalter für beliebige Elemente ihres Typs dienen, soll es insbesondere möglich sein, sie durch Terme dieses Typs zu ersetzen, was durch die Anwendung einer Substitution auf einen Term geschieht:
Eine Substitution ξ ist eine Abbildung, die jeder Variablen einen Term desselben Typs zuordnet. ξ_x^t sei die Substitution, die x den Term t zuordnet und auf allen anderen Variablen mit ξ übereinstimmt. ϵ sei die „leere Substitution", d.h. die Identität auf den Variablen, und $[x \mapsto t]$ sei ϵ_x^t.

Definition 1.4 *Wir definieren die Anwendung $t\xi$ einer Substitution ξ auf einen Term t durch Induktion über den Termaufbau:*

- $x\xi := \xi(x)$
- $c\xi := c$
- $(\lambda yt)\xi := \lambda z(t\xi_y^z)$
  wobei z eine „neue" Variable vom selben Typ wie y sei, d.h. $z \notin FV(\xi(x))$ für alle $y \neq x \in FV(t)$.
- $(st)\xi := (s\xi)(t\xi)$

Diese Definition ist natürlich nicht eindeutig, sondern abhängig von der Wahl der Variable z in der dritten Klausel, wir wollen im folgenden jedoch α-gleiche Terme, d.h. solche, die bis auf Umbenennung gebundener Variablen identisch sind, identifizieren. Wir können dann o.B.d.A. davon ausgehen, daß bei der Definition von $(\lambda yt)\xi$ die Variable y bereits die Eigenschaft $y \notin FV(\xi(x))$ für alle $y \neq x \in FV(t)$ erfüllt und somit $(\lambda yt)\xi := \lambda y(t\xi_y^y)$ setzen.

Lemma 1.1
1. *$\xi(x) = \zeta(x)$ für alle $x \in FV(t) \Rightarrow t\xi = t\zeta$*
2. *$FV(t\xi) = \bigcup_{x \in FV(t)} FV(\xi(x))$*
3. *$(t\xi)\zeta = t(\zeta \circ \xi)$ mit $(\zeta \circ \xi)(x) := (x\xi)\zeta$*

1.2.2 Termersetzung

Die bisherigen Definitionen suggerieren gewisse Äquivalenzen zwischen unseren Termen: Nach der intendierten Semantik, die wir zu unseren syntaktischen Definitionen angegeben haben, sollten zum Beispiel die Terme $(\lambda xt)s$ und $t[x \mapsto s]$ das gleiche Objekt bezeichnen.
Wir werden diese Äquivalenzen nun explizit angeben, und zwar in einer „gerichteten" Form als Termersetzungssystem. Dies wird uns später ermöglichen, zu jedem Objekt, das durch einen Term t bezeichnet wird, einen kanonischen Bezeichner, die „Normalform" von t, anzugeben und daraus schließlich eine Semantik für unser System zu konstruieren.
Als erstes definieren wir die Konversionsrelation $\mapsto_\rho \subseteq \mathcal{T}^\rho \times \mathcal{T}^\rho$:

$$(\beta) \quad (\lambda xt)s \mapsto t[x \mapsto s]$$

$$(\eta) \quad \lambda x.tx \mapsto t \quad \text{falls} \quad x \notin FV(t)$$

Seien $\mu = \mu\alpha(\vec{\kappa})$ und $\kappa_i = \vec{\rho} \to (\vec{\sigma}_1 \to \alpha) \to \ldots \to (\vec{\sigma}_m \to \alpha) \to \alpha$:

$$(R) \quad (R^\mu_\rho \vec{s})^{\mu \to \rho}(K^\mu_i \vec{t}) \mapsto s_i \vec{t}((R^\mu_\rho \vec{s}) \circ t^R_1) \ldots ((R^\mu_\rho \vec{s}) \circ t^R_m)$$

mit $s^{\sigma \to \tau} \circ t^{\vec{\rho} \to \sigma} := (\lambda \vec{x}^{\vec{\rho}}.s(t\vec{x}))^{\vec{\rho} \to \tau}$.
Die Einschrittreduktionsrelation $\to^1$ ergibt sich daraus wie folgt: $s \to^1 t$ genau dann, wenn t aus s entsteht, indem ein Teilterm s' in s durch t' ersetzt wird und $s' \mapsto t'$ gilt. Die Reduktionsrelationen $\to^+$ bzw. $\to^*$ seien der transitive bzw. der reflexive transitive Abschluß von $\to^1$.
Für $\vec{t} = t_1, \ldots, t_n$ schreiben wir $\vec{t} \to^1 \vec{t'}$, falls $t_i \to^1 t'_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt und $t_j = t'_j$ für alle $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$.
Folgende Eigenschaften unseres Termersetzungssystems lassen sich leicht verifizieren:

Lemma 1.2 *1.* $r\vec{t} \to^* t \Rightarrow t = r\vec{s}$ *mit* $\vec{t} \to^* \vec{s}$ *, falls* $r = x$ *oder* $r = K^\mu_i$

2. Substitution und Termersetzung sind miteinander verträglich, das heißt: $t \to^1 t', s \to^1 s' \Rightarrow t[x \mapsto s] \to^* t'[x \mapsto s']$

Definition 1.5 *Ein Term t heißt „normal" oder „in Normalform" wenn es keinen Term s mit $t \to^1 s$ gibt.*

Lemma 1.3 *Ist t^μ geschlossen und in Normalform, so ist t von der Form $K^\mu_i \vec{s}$.*

Beweis durch Induktion über den Termaufbau: Ein geschlossener normaler Term t eines Typs μ kann nur von der Form $K^\mu_i \vec{s}$ oder $R^\nu_{\vec{\rho} \to \mu} \vec{s} r^\nu \vec{p}^{\vec{\rho}}$ sein. Nach Induktionsvoraussetzung ist im zweiten Fall r von der Form $K^\nu_j \vec{q}$, da r als Teilterm von t ebenfalls normal sein muß. Damit ist aber t nicht normal, Widerspruch.

Nun kommen wir zum bereits angekündigten Resultat, daß zu jedem Term t ein eindeutig bestimmter Term s in Normalform mit $t \to^* s$ gefunden werden kann. Dies beweisen wir in zwei Schritten:

1. Jeder Term t ist stark normalisierbar, das heißt jede mit diesem Term beginnenden Reduktionsfolge $t \to^1 t_1 \to^1 t_2 \to^1 \ldots$ endet nach endlich vielen Schritten in einer Normalform.

2. Sind s und s' zwei Terme in Normalform mit $t \to^* s$ und $t \to^* s'$, so gilt $s = s'$ (Konfluenz).

1.2.3 Starke Normalisierung

Definition 1.6 *Die Menge SN der stark normalisierbaren Terme ist induktiv definiert durch:*

$$(\forall t.\, s \to^1 t \;\Rightarrow\; t \in SN) \;\Rightarrow\; s \in SN$$

Man beachte, daß mit t offensichtlich auch jeder Teilterm von t stark normalisierbar ist.
Der Beweis der starken Normalisierbarkeit aller Terme benutzt eine an die freien Algebren angepasste Variante der Taitschen Methode der starken Berechenbarkeitsprädikate. Die Definition dieser Prädikate und der Beweis sind angelehnt an Zucker's Beweis der starken Normalisierung seines Termsystems für Rekursion über die ersten drei Zahlen- oder Baumklassen. Zucker benutzt jedoch ein kombinatorisches Termsystem und definiert die starke Berechenbarkeit nur für geschlossene Terme, die wesentlichen Ideen zur Anpassung dieses Beweises an Terme mit freien Variablen im λ-Kalkül entstammen einer entsprechenden Beweisskizze von Berger.

Definition 1.7 *Wir definieren die starken Berechenbarkeitsprädikate $SB^\rho \subseteq \mathcal{T}^\rho$ durch Induktion über ρ:*

- $\rho = \mu\alpha(\vec{\kappa})$*: SB^ρ sei induktiv definiert durch:*

$$\left.\begin{array}{l} \forall t.\, s \to^1 t \;\Rightarrow\; t \in SB \\ s = K_i^\rho \vec{t} \;\Rightarrow\; \vec{t}^P \in SB \wedge \bigwedge_{i=1}^{n^R} (\forall \vec{r} \in SB.\, t_i^R \vec{r} \in SB^\rho) \end{array}\right\} \Rightarrow s \in SB^\rho$$

- $\rho = \sigma \to \tau$*:*

$$s \in SB^{\sigma\to\tau} \;:\Longleftrightarrow\; \forall t \in SB^\sigma.\, (st) \in SB^\tau$$

Bemerkung: $K_i^\mu \vec{t} \in SB \;\Rightarrow\; \vec{t} \in SB$

Lemma 1.4 $\forall s \in SB^\rho, s'.\, s \to^1 s' \;\Rightarrow\; s' \in SB^\rho$

Beweis: Induktion nach ρ:

- $\rho = \mu\alpha(\vec{\kappa})$: Behauptung gilt nach Definition

- $\rho = \sigma \to \tau$: Sei $t \in SB^\sigma$, dann ist $(st) \in SB^\tau$ und $(st) \to^1 (s't)$, also nach Induktionsvoraussetzung $(s't) \in SB^\tau$, da $t \in SB^\sigma$ beliebig war, folgt daraus $s' \in SB^{\sigma\to\tau}$.

Lemma 1.5 $\forall \vec{t} \in SN.\, \vec{t} \in SB \;\Rightarrow\; (x\vec{t})^\mu \in SB$

Beweis: Induktion nach $\vec{t} \in SN$: Gelte $\vec{t} \in SB$, nach Lemma 1.2 (1.) und Definition von SB^μ ist zu zeigen: $x\vec{t} \rightarrow^1 x\vec{t'} \Rightarrow x\vec{t'} \in SB$. Dies gilt jedoch nach Induktionsvoraussetzung, da nach vorigem Lemma $\vec{t'} \in SB$ ist.

Lemma 1.6 *1.* $SB^\rho \subseteq SN$

2. $x \in SB^\rho$

Beweis durch simultane Induktion nach ρ:

- $\rho = \mu\alpha(\vec{\kappa})$:
  1. Wir zeigen $\forall t \in SB^{\mu\alpha(\vec{\kappa})}.t \in SN$ durch Nebeninduktion nach $t \in SB^{\mu\alpha(\vec{\kappa})}$: Es genügt $t \rightarrow^1 t' \Rightarrow t' \in SN$ zu zeigen, dies folgt jedoch aus der Nebeninduktionsvoraussetzung.
  2. $x^{\mu\alpha(\vec{\kappa})} \in SB$ gilt, da kein t mit $x \rightarrow^1 t$ existiert.
- $\rho = \sigma \rightarrow \tau$:
  1. Sei $t \in SB^{\sigma\rightarrow\tau}$. Nach Induktionsvoraussetzung (2.) ist $x^\sigma \in SB$, also $(tx)^\tau \in SB$. Nach Induktionsvoraussetzung (1.) ist $tx \in SN$, und damit auch $t \in SN$.
  2. Wir zeigen $(x\vec{t})^\mu \in SB$ für alle $\vec{t} \in SB$. Dies gilt nach vorigem Lemma, da nach Induktionsvoraussetzung (1.) $\vec{t} \in SN$ ist.

Korollar 1.1 *$\vec{t} \in SB \Rightarrow K_i^\mu\vec{t} \in SB$, das heißt $K_i^\mu \in SB$.*

Beweis: Zeige zuerst $\forall\vec{t} \in SN.\vec{t} \in SB \Rightarrow K_i^\mu\vec{t} \in SB^\mu$ durch Induktion nach $\vec{t} \in SN$ wie in Lemma 1.5 und verwende dann Teil 1 des vorigen Lemmas.

Lemma 1.7 $\forall t, s, \vec{s} \in SN.\,(t[x \mapsto s]\vec{s}) \in SB^\mu \Rightarrow (\lambda xt)s\vec{s} \in SB^\mu$

Beweis: Durch Induktion nach $t, s, \vec{s} \in SN$: Gelte $(\lambda xt)s\vec{s} \rightarrow^1 r$, zu zeigen ist $r \in SB$.
1.Fall: $r = (\lambda xt')s'\vec{s'}$ mit $t, s, \vec{s} \rightarrow^1 t', s', \vec{s'}$: Nach Lemma 1.2 (2.) und Lemma 1.4 ist $t'[x \mapsto s']\vec{s'} \in SB$, also gilt nach Induktionsvoraussetzung $r = (\lambda xt')s'\vec{s'} \in SB$.
2. Fall: $r = t[x \mapsto s]\vec{s}$: $r \in SB$ gilt nach Voraussetzung.

Korollar 1.2 $\forall t, s, \vec{s} \in SN.\,(t[x \mapsto s]\vec{s}) \in SB^\rho \Rightarrow (\lambda xt)s\vec{s} \in SB^\rho$

Beweis: Induktion nach ρ unter Zuhilfenahme von Lemma 1.6, Teil 1.

Lemma 1.8 $\forall t \in SB^\mu\,\forall\vec{s}, \vec{r^{\vec{\sigma}}} \in SN.\,\vec{s}, \vec{r} \in SB \Rightarrow R^\mu_{\vec{\sigma}\rightarrow\nu}\vec{s}t\vec{r} \in SB^\nu$.

Beweis: Hauptinduktion nach $t \in SB^\mu$ und Nebeninduktion nach $\vec{s}, \vec{r} \in SN$, gelte

$$R^\mu_{\vec{\sigma}\to\nu}\vec{s}t\vec{r} \to^1 r,$$

zu zeigen ist $r \in SB$:
1.Fall: $r = R^\mu_{\vec{\sigma}\to\nu}\vec{s'}t\vec{r'} \in SB$ nach Nebeninduktionsvoraussetzung.
2.Fall: $r = R^\mu_{\vec{\sigma}\to\nu}\vec{s}t'\vec{r} \in SB$ nach Hauptinduktionsvoraussetzung.
3.Fall: $t = K^\mu_i\vec{p}$ und

$$r = s_i\vec{p}(\lambda\vec{x}_1.R^\mu_{\vec{\sigma}\to\nu}\vec{s}(p^R_1\vec{x}_1))\ldots(\lambda\vec{x}_{n^R}.R^\mu_{\vec{\sigma}\to\nu}\vec{s}(p^R_{n^R}\vec{x}_{n^R}))\vec{r}$$

Nach Voraussetzung gilt $\vec{s}, \vec{r} \in SB$, $\vec{p} \in SB$ folgt aus $t = K^\mu_i\vec{p} \in SB$, außerdem haben wir für alle rekursiven Argumente p^R_i von t und alle stark berechenbaren $\vec{q}$ die Hauptinduktionsvoraussetzung für $(p^R_i\vec{q})^\mu$ zur Verfügung. Zu zeigen bleibt $(\lambda\vec{x}_i.R^\mu_{\vec{\sigma}\to\nu}\vec{s}(p^R_i\vec{x}_i)) \in SB$ $(i = 1, \ldots, n^R)$. Seien dazu $\vec{q}, \vec{r'}^{\vec{\sigma}} \in SB$ beliebig, es genügt, $(\lambda\vec{x}_i.R^\mu_{\vec{\sigma}\to\nu}\vec{s}(p^R_i\vec{x}_i))\vec{q}\vec{r'} \in SB^\nu$ zu zeigen: Nach Hauptinduktionsvoraussetzung für $p^R_i\vec{q}$ gilt $R^\mu_{\vec{\sigma}\to\nu}\vec{s}(p^R_i\vec{q}))\vec{r'} \in SB$, da nach Lemma 1.6 $\vec{q}, \vec{r'} \in SN$ ist. Daraus folgt mit Korollar 1.2 die Behauptung.

Korollar 1.3 $R^\mu_\rho \in SB$

Definition 1.8 *Eine Substitution ξ heißt stark berechenbar, wenn $\xi(x) \in SB$ für alle Variablen x. Ein Term heißt stark berechenbar unter Substitution, wenn $t\xi \in SB$ für alle stark berechenbaren Substitutionen ξ.*

Satz 1.1 *Alle Terme sind stark berechenbar unter Substitution.*

Beweis: Induktion über den Termaufbau:

- x : $x\xi$ ist stark berechenbar, da ξ stark berechenbar ist .
- K^μ_i : Korollar 1.1
- R^μ_ρ : Korollar 1.3
- (st) : $s\xi \in SB, t\xi \in SB \Rightarrow (st)\xi = (s\xi)(t\xi) \in SB$.
- λxt : Sei ξ eine stark berechenbare Substitution, zu zeigen ist $(\lambda xt)\xi = \lambda x(t\xi^x_x) \in SB$, dazu zeigen wir $(\lambda x(t\xi^x_x))\, s \in SB$ für beliebige $s \in SB$. Nach Induktionsvoraussetzung ist $(t\xi^x_x)[x \mapsto s] = t\xi^s_x \in SB$, mit Korollar 1.2 folgt $(\lambda x(t\xi^x_x))s \in SB$, da nach Induktionsvoraussetzung auch $t\xi^x_x \in SB$ gilt.

Korollar 1.4 *Alle Terme sind stark normalisierbar.*

1.2.4 Konfluenz

Definition 1.9 *Ein Term t heißt lokal konfluent, wenn es zu jedem Paar t' und t'' mit $t \to^1 t'$ und $t \to^1 t''$ einen Term t''' gibt mit $t' \to^* t'''$ und $t'' \to^* t'''$.*

Lemma 1.9 *Alle Terme sind lokal konfluent.*

Beweis durch Induktion über den Termaufbau: Für Variablen und Konstanten ist die Behauptung trivial.
Abstraktion:

$$\begin{tikzcd}
& \lambda x t \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
\lambda x t' \arrow[dr, "*"'] & & \lambda x t'' \arrow[dl, "*"] \\
& \lambda x t''' &
\end{tikzcd}$$

Mit $t \to^1 t'$ und $t \to^1 t''$ erhalten wir t''' aus der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{tikzcd}
& \lambda x(tx) \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
\lambda x(t'x) \arrow[dr, "1"'] & & t \arrow[dl, "1"] \\
& t' &
\end{tikzcd}$$

falls $x \notin FV(t)$

Anwendungen:

$$\begin{tikzcd}
& rs \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
r's \arrow[dr, "*"'] & & r''s \arrow[dl, "*"] \\
& r'''s &
\end{tikzcd}$$

Mit $r \to^1 r'$ und $r \to^1 r''$ erhalten wir r''' aus der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{tikzcd}
& rs \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
rs' \arrow[dr, "*"'] & & rs'' \arrow[dl, "*"] \\
& rs''' &
\end{tikzcd}$$

Mit $s \to^1 s'$ und $s \to^1 s''$ erhalten wir wieder s''' aus der Induktionsvoraussetzung

$$\begin{tikzcd}
& rs \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
r's \arrow[dr, "1"'] & & rs' \arrow[dl, "1"] \\
& r's' &
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (\lambda x r)s \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
(\lambda x r')s' \arrow[dr, "1"'] & & r[x \mapsto s] \arrow[dl, "*"] \\
& r'[x \mapsto s'] &
\end{tikzcd}
$$

Nach Lemma 1.2

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& (R^{\mu}_{\rho}\vec{r})^{\mu\to\rho}(K^{\mu}_{i}\vec{s}) \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "1"] & \\
(R^{\mu}_{\rho}\vec{r'})(K^{\mu}_{i}\vec{s'}) \arrow[dr, "1"'] & & r_i\vec{s}(\lambda\vec{x}_1.R^{\mu}_{\rho}\vec{r}(s^R_1\vec{x}_1))\dots(\lambda\vec{x}^R_n.R^{\mu}_{\rho}\vec{r}(s^R_{n^R}\vec{x}^R_n)) \arrow[dl, "*"] \\
& r'_i\vec{s'}(\lambda\vec{x}_1.R^{\mu}_{\rho}\vec{r'}({s'}^R_1\vec{x}_1))\dots(\lambda\vec{x}^R_n.R^{\mu}_{\rho}\vec{r'}({s'}^R_{n^R}\vec{x}^R_n)) &
\end{tikzcd}
$$

Satz 1.2 *Alle Terme haben eine eindeutige Normalform, d.h. zu jedem Term t existiert genau ein normaler Term s mit $t \to^* s$.*

Beweis: Nach Korollar 1.4 sind alle Terme stark normalisierbar, wir können also Induktion nach $t \in SN$ benutzen: Falls t bereits normal ist, ist die Behauptung trivial, gelte also $t \to^1 t'$ und $t \to^1 t''$, nach Induktionsvoraussetzung haben t' und t'' eindeutige Normalformen, zu zeigen ist lediglich, daß diese übereinstimmen. Dies folgt jedoch aus dem vorigen Lemma.

Definition 1.10 *Für alle Terme t sei $N\!f(t)$ die Normalform von t.*

1.3 Formeln

Nachdem wir uns nun eingehend mit der Termsprache unseres Systems HA^{μ} beschäftigt haben, kommen wir nun zu den Formeln, die wir, ausgehend von einer Menge von Prädikatensymbolen $P \in \mathcal{L}$, mit Hilfe der logischen Verknüpfungen $\to$ und $\wedge$ und den Quantoren $\forall$ und $\exists$ aufbauen.

Definition 1.11 *Eine Sprache $\mathcal{L}$ ist eine Menge von Paaren $(P, \vec{\rho})$, bestehend aus einem Prädikatensymbol P und einer Liste $\vec{\rho}$ der Typen seiner Argumente, wir schreiben $P : [\vec{\rho}]$ für $(P, \vec{\rho}) \in \mathcal{L}$. Die Formeln $\mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ der Sprache $\mathcal{L}$ sind definiert durch:*

$$\frac{P : [\vec{\rho}] \quad \vec{t} : \vec{\rho}}{P(\vec{t}) \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}}$$

$$\frac{A \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \quad B \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}}{A \to B \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}} \qquad \frac{A \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \quad B \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}}{A \wedge B \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}} \qquad \frac{A \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}}{\forall x\, A \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}} \qquad \frac{A \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}}{\exists x\, A \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}}$$

Wir nennen eine Formel negativ, wenn sie keinen Existenzquantor enthält.

Definition 1.12 *Die freien Variablen $FV(A)$ einer Formel A und die Anwendung $A\xi$ einer Substitution ξ auf A werden wie üblich definiert:*

- $FV(P(\vec{t})) := FV(\vec{t})$
- $FV(A \to B) := FV(A \land B) := FV(A) \cup FV(B)$
- $FV(\forall x\, A) := FV(\exists x\, A) := FV(A) \setminus \{x\}$
- $P(\vec{t})\xi := P(\vec{t}\xi)$
- $(A \mathbin{\substack{\to \\ \land}} B)\xi := A\xi \mathbin{\substack{\to \\ \land}} B\xi$
- $(\substack{\forall \\ \exists} xA)\xi := \substack{\forall \\ \exists} z(A\xi_x^z)$ *wobei z eine „neue"Variable sei, d.h. $z \notin FV(\xi(x))$ für alle $x \in FV(A)$.*

Wie bei den Termen identifizieren wir auch Formeln, die sich nur durch Umbenennung gebundener Variablen unterscheiden und gehen stets davon aus, daß es bei der Substitution zu keinen Kollisionen zwischen freien und gebundenen Variablen kommt.
Wir setzen im folgenden voraus, daß $\mathcal{L}$ Prädikatensymbole $\mathsf{atom} : [\mathsf{boole}]$ und $=_\rho : [\rho, \rho]$ für jeden Typ ρ enthält.

Notation:

- Wir verwenden P, Q, R für Prädikate und A, B, C, D, E für Formeln.
- Wir schreiben $\top$ für $\mathsf{atom}(\mathsf{true})$, $\bot$ für $\mathsf{atom}(\mathsf{false})$ und $\neg A$ für $A \to \bot$.
- Außerdem schreiben wir $s = t$ für $= (s, t)$.

1.4 Beweise

Wir kommen nun zum Beweiskalkül, die Beweise schreiben wir im Geiste des Curry-Howard-Isomorphismus als λ-Terme mit der bewiesenen Formel als Typ, dazu benötigen wir Annahmevariablen u^A für jede Formel A und Konstanten c^B für jedes Axiom B. Um die Eigenvariablenbedingung für die Einführungsregel des Allquantors formulieren zu können, definieren wir simultan die Menge der freien Annahmevariablen eines Beweises mit und schreiben $M : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow A$ wenn M ein Beweis der Formel A mit freien Annahmevariablen $\mathcal{A}$ und Konstanten c^B für Axiome $B \in \Gamma$ ist.

$$\frac{}{u^A : \Gamma, \{u^A\} \Rightarrow A} \qquad \frac{B \in \Gamma}{c^B : \Gamma, \{\} \Rightarrow B}$$

$$\frac{M : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow B}{\lambda u^A M : \Gamma, \mathcal{A} \setminus \{u^A\} \Rightarrow A \to B}$$

$$\frac{M : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow A \to B \qquad N : \Gamma, \mathcal{B} \Rightarrow A}{(MN) : \Gamma, \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \Rightarrow B}$$

$$\frac{M : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow A \qquad N : \Gamma, \mathcal{B} \Rightarrow B}{\langle M, N \rangle : \Gamma, \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \Rightarrow A \land B}$$

$$\frac{M : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \wedge A_2}{\pi_i(M) : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow A_i}$$

$$\frac{M : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow A}{\lambda x M : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow \forall x\, A} \quad x \notin \bigcup_{u^A \in \mathcal{A}} FV(A)$$

$$\frac{M : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow \forall x^\rho\, A \qquad t : \rho}{(Mt) : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow A[x \mapsto t]}$$

$$\frac{M : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow A[x \mapsto t]}{\exists^+_{\exists x\, A, t} M : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow \exists x\, A}$$

$$\frac{M : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow \exists x\, A \qquad N : \Gamma, \mathcal{B} \Rightarrow \forall x. A \to B}{\exists^-_{\exists x\, A, B} MN : \Gamma, \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \Rightarrow B} \quad x \notin FV(B)$$

Wir schreiben $\Gamma \vdash A$, falls A aus der Axiomenmenge Γ beweisbar ist, d.h. falls es einen Beweisterm $M : \Gamma, \{\} \Rightarrow A$ gibt und $\vdash A$ für $\{\} \vdash A$.

Als nächstes definieren wir die Axiome für HA^μ:
Wir wollen den Typ boole als Typ der entscheidbaren Prädikate verwenden (zur Entscheidbarkeit: vgl. Lemma 1.3), dazu fordern wir:

$$(Truth) \quad \top$$

$$(EFQ_P) \quad \forall \vec{x}. \bot \to P(\vec{x}) \quad \text{für alle Prädikate } P \in \mathcal{L}$$

Neben den üblichen Gleichheitsaxiomen

$$\begin{array}{ll} (Trans_\rho) & \forall x^\rho, y^\rho, z^\rho. x = y \to y = z \to x = z \\ (Symm_\rho) & \forall x^\rho, y^\rho. x = y \to y = x \\ (Repl^A_\rho) & \forall x^\rho, y^\rho. x = y \to A \to A[x \mapsto y] \quad \text{für alle Formeln } A \end{array}$$

verlangen wir, daß das im letzten Abschnitt definierte Termersetzungssystem werterhaltend ist

$$(Conv^{s \mapsto t}_\rho) \quad s = t \quad \text{für alle } \rho, s^\rho, t^\rho \text{ mit } s \mapsto t$$

Schließlich kommen wir zu dem Axiomenschema, das die Beweiskraft unseres Systems ausmacht, die strukturelle Induktion für die μ-Typen: Seien $\mu = \mu\alpha(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ und A eine beliebige Formel.

$$(Ind^{\forall w^\mu A}_\mu) \quad SF^{\forall w\, A}_{\mu,1} \to \ldots \to SF^{\forall w\, A}_{\mu,n} \to \forall w\, A$$

mit

$$\begin{array}{l} SF^{\forall w\, A}_{\mu,i} := \forall \vec{y}^{\vec{\rho}}, f_1^{\vec{\sigma}_1 \to \mu}, \ldots, f_m^{\vec{\sigma}_m \to \mu}. \\ \qquad\qquad IV^{\forall w\, A}_{\mu,i,1}(f_1) \to \ldots \to IV^{\forall w\, A}_{\mu,i,w}(f_n) \to A[w \mapsto K^\mu_i \vec{y} \vec{f}] \\ IV^{\forall w\, A}_{\mu,i,j}(f^{\vec{\sigma}_j \to \mu}) := \forall \vec{v}^{\vec{\sigma}_j}\, A[w \mapsto f\vec{v}] \quad (j = 1, \ldots, m) \end{array}$$

für $i \in \{1, \ldots, n\}, \kappa_i = \vec{\rho} \to (\vec{\sigma}_1 \to \alpha) \to \ldots \to (\vec{\sigma}_m \to \alpha) \to \alpha$ und $\vec{y}, \vec{f}, \vec{v} \notin FV(A)$.

Lemma 1.10 • *$Nf(s) = Nf(t) \;\Rightarrow\; HA^\mu \vdash t = s$*

- *$HA^\mu \vdash \bot \to A$ für alle Formeln A.*

Wir definieren noch den Begriff einer Harropformel, der im Zusammenhang mit der mr-Interpretation wichtig wird.

Definition 1.13 *Eine Formel A heißt Harropformel, wenn sie keine Existenzformel $\exists x\, B$ strikt positiv enthält. Dabei ist ein strikt positives Vorkommen einer Formel C in einer Formel D, geschrieben $C\, sp\, D$ definiert durch:*

$$\frac{}{C\, sp\, C} \qquad \frac{C\, sp\, D}{C\, sp\, A \to D}$$

$$\frac{C\, sp\, D_i \quad (i = 0\ oder\ 1)}{C\, sp\, D_0 \wedge D_1} \qquad \frac{C\, sp\, D}{C\, sp\, \overset{\forall}{\underset{\exists}{}} x D}$$

1.5 Ein Termmodell für HA^μ

In diesem Abschnitt gehen wir kurz auf die Semantik von HA^μ ein. Mögliche Modellkonstruktionen wären zum einen das volle mengentheoretische Modell, in dem ein Pfeiltyp $\rho \to \sigma$ durch die Menge aller Abbildungen vom Typ ρ in den Typ σ interpretiert wird, und zum anderen ein bereichstheoretisches Modell, in dem der Typ $\rho \to \sigma$ nur die stetigen Funktionen von ρ nach σ enthält.
Beide Modelle erfordern jedoch nichttriviale Konstruktionen, um die Interpretationen der μ-Typen zu erhalten. Wir geben daher ein anderes Modell an, das besonders einfach zu konstruieren ist, wenn man bereits die Existenz eindeutiger Normalformen für die Terme von HA^μ zur Verfügung hat.
Als erstes definieren wir, was wir unter einem Modell für eine Sprache $\mathcal{L}$ verstehen:

Definition 1.14 *Sei $(D_\rho)_{\rho \in \mathcal{T}}$ eine Familie von nichtleeren Mengen. Eine Belegung in $(D_\rho)_{\rho \in \mathcal{T}}$ ist eine Abbildung, die jeder Variablen x^ρ ein Element von D_ρ zuordnet. Ein Modell für eine Sprache $\mathcal{L}$ besteht aus einer Familie $(D_\rho)_{\rho \in \mathcal{T}}$ von nichtleeren Mengen und Interpretationen $I(\cdot)$ und $[\![\cdot]\!]_\cdot$, die jedem Prädikatensymbol $P : [\rho_1, \ldots, \rho_n]$ eine Menge $I(P) \subseteq D_{\rho_1} \times \ldots \times D_{\rho_n}$ und jedem Term t^ρ und jeder Belegung ξ den Wert von t unter ξ, geschrieben als $[\![t]\!]_\xi \in D_\rho$ zuordnet, so daß folgende Eigenschaften gelten:*

- *(Koinzidenzlemma) $\xi(x) = \zeta(x)$ für alle $x \in FV(t) \;\Rightarrow\; [\![t]\!]_\xi = [\![t]\!]_\zeta$*
- *(Substitutionslemma) $[\![t[x \mapsto s]]\!]_\xi = [\![t]\!]_{\xi_x^{[\![s]\!]_\xi}}$*

Man kann zu jedem Objekt $a \in D_{\rho \to \sigma}$ eine Abbildung $f : D_\rho \to D_\sigma$ zuordnen durch

$$f(b) := [\![(xy)]\!]_{\xi_{x,y}^{a,b}}$$

für eine beliebige Belegung ξ (die Definition hängt aufgrund des Koinzidenzlemmas nicht von ξ ab). Diese Zuordnung muß jedoch weder injektiv noch surjektiv sein.

Definition 1.15 *Ist $\mathcal{M}$ ein Modell für $\mathcal{L}$, so definieren wir die Gültigkeit einer Formel A unter einer Belegung ξ, geschrieben $\mathcal{M} \models A[\xi]$ wie folgt:*

- $\mathcal{M} \models P(\vec{x})[\xi] \ :\Longleftrightarrow \ [\![\vec{x}]\!]_\xi \in I(P)$
- $\mathcal{M} \models (A \to B)[\xi] \ :\Longleftrightarrow$ *wenn* $\mathcal{M} \models A[\xi]$ *dann* $\mathcal{M} \models B[\xi]$
- $\mathcal{M} \models A \wedge B[\xi] \ :\Longleftrightarrow \ \mathcal{M} \models A[\xi]$ *und* $\mathcal{M} \models B[\xi]$
- $\mathcal{M} \models \forall x^\rho\, A[\xi] \ :\Longleftrightarrow \ \mathcal{M} \models A[\xi_x^a]$ *für alle* $a \in D_\rho$
- $\mathcal{M} \models \exists x^\rho\, A[\xi] \ :\Longleftrightarrow \ \mathcal{M} \models A[\xi_x^a]$ *für ein* $a \in D_\rho$

Koinzidenz- und Substitutionslemma übertragen sich auf die Gültigkeit von Formeln:

Lemma 1.11

- $\xi(x) = \zeta(x)$ *für alle* $x \in FV(A) \Rightarrow \mathcal{M} \models A[\xi] \iff \mathcal{M} \models A[\zeta]$
- $\mathcal{M} \models A[x \mapsto s][\xi] \iff \mathcal{M} \models A[\xi_x^{[\![s]\!]_\xi}]$

Aus der Definition $\mathcal{M} \models A[\xi]$ folgt sofort die Korrektheit sämtlicher Schlußregeln unseres Kalküls, das heißt es gilt:

Satz 1.3 *Gilt $\mathcal{M} \models A[\xi]$ für alle $A \in \Gamma$ und alle Belegungen ξ, so folgt für alle Formeln B:*

$$\Gamma \vdash B \ \Rightarrow \ \mathcal{M} \models B[\xi] \text{ für alle Belegungen } \xi$$

Wir definieren nun ein Termmodell für die Sprache $\mathcal{L} = \{(\mathsf{atom}, (\mathsf{boole}))\} \cup \{(=_\rho, (\rho, \rho)) \ : \ \rho \in \mathcal{T}\}$, in dem alle Axiome von HA^μ gültig sind: D_ρ sei die Menge der geschlossenen normalen Terme vom Typ ρ. Die Belegungen sind dann gerade die geschlossenen normalen Substitutionen. Der Wert $[\![t]\!]_\xi$ wird definiert als $\mathrm{Nf}(t\xi)$. Koinzidenz- und Substitutionslemma ergeben sich dann als Korollare zu Lemma 1.1, Teil 1, und Lemma 1.2, Teil 1. Die Gleichheit $=_\rho$ interpretieren wir durch die Identität auf D_ρ, die Relation atom durch $\{\mathsf{true}\} \subseteq D_{\mathsf{boole}} = \{\mathsf{true}, \mathsf{false}\}$. Das so entstandene Modell nennen wir $\mathcal{M}^\lambda$.
Die Gültigkeit von $(Truth), (EFQ_P), (Stab_P), (\mathrm{Trans}_\rho), (\mathrm{Symm}_\rho), (\mathrm{Repl}_\rho^A)$ und $(\mathrm{Conv}_\rho^{s \mapsto t})$ in diesem Modell ist offensichtlich, lediglich die Induktionsaxiome müssen noch überprüft werden:
Sei also ξ eine Belegung, $\mu = \mu\alpha(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$, A eine beliebige Formel und gelte $\mathcal{M}^\lambda \models SF_{\mu,i}^{\forall w\, A}[\xi]$ für $i = 1, \ldots, n$. Zu zeigen ist $\mathcal{M}^\lambda \models \forall w\, A[\xi]$, d.h. $\mathcal{M}^\lambda \models A[\xi_w^t]$ für alle $t \in D_\mu$. Wir zeigen dies durch Induktion über die starke Berechenbarkeit von t. Nach Lemma 1.3 ist t von der Form $K_i^\mu \vec{s}$. Sei $\kappa_i = \vec{\rho} \to (\vec{\sigma}_1 \to \alpha) \to \ldots \to (\vec{\sigma}_m \to \alpha) \to \alpha$. Dann ist

$$\begin{aligned} SF_{\mu,i}^{\forall w\, A} = \forall \vec{y}^{\vec{\rho}}, f_1^{\vec{\sigma}_1 \to \mu}, \ldots, f_m^{\vec{\sigma}_m \to \mu}.& \\ IV_{\mu,i,1}^{\forall w\, A}(f_1) \to \ldots \to IV_{\mu,i,m}^{\forall w\, A}(f_m) \to A[w \mapsto K_i^\mu \vec{y}\vec{f}],& \end{aligned}$$

also gilt insbesondere

$$\mathcal{M}^\lambda \models (IV^{\forall w\, A}_{\mu,i,1}(s^R_1) \to \ldots \to IV^{\forall w\, A}_{\mu,i,m}(s^R_m) \to A[w \mapsto K^\mu_i \vec{s}])[\xi],$$

es genügt also, $\mathcal{M}^\lambda \models IV^{\forall w\, A}_{\mu,i,j}(s^R_j)[\xi]$ für alle $j = 1,\ldots,m$ zu zeigen. Da $IV^{\forall w\, A}_{\mu,i,j}(s^R_j) = \forall \vec{v}^{\vec{\sigma}_j}\, A[w \mapsto s^R_j \vec{v}]$, ist $\mathcal{M}^\lambda \models A[w \mapsto s^R_j][\xi^{\vec{r}}_{\vec{v}}]$ für alle $\vec{r} \in D_{\vec{\sigma}_j}$ zu zeigen. Dies ist äquivalent zu $\mathcal{M}^\lambda \models A[\xi^{s^R_j \vec{r}}_w]$, das ist aber gerade die Induktionsvoraussetzung.

Man beachte, daß dieses Modell im Gegensatz zu den mengen- bzw. bereichstheoretischen Modellen nicht extensional ist, so definieren zum Beispiel die Terme $\lambda p^{\mathsf{boole}}.p$ und $R^{\mathsf{boole}}_{\mathsf{boole}}\,\mathsf{true}\,\mathsf{false}$ beide die Identität auf boole, werden im Modell jedoch nicht identifiziert.

Kapitel 2

Realisierbarkeit

2.1 Die mr-Interpretation

Wir definieren jetzt eine Variante der in [5] ausführlich beschriebenen „*modified realizability*"- Interpretation. In der ursprünglichen Fassung definiert man zu jeder Formel A die Liste $\vec{\rho}$ der Typen der potentiellen Realisierer von A, sowie die Formel $\vec{t}^{\vec{\rho}}$ mr A, die besagt, daß A durch die Terme $\vec{t}$ realisiert wird. Später deutet Troelstra eine Variante an für den Fall, daß das Typsystem die Bildung von Produkttypen ermöglicht. In diesem Fall kann man die Liste $\vec{\rho}$ durch einen einzigen Typ ρ ersetzen, der im wesentlichen dem Produkt der $\vec{\rho}$ entspricht. Dabei ergibt sich jedoch ein Problem: Welcher Typ entspricht der leeren Liste? Troelstra löst das Problem, indem er dafür einen beliebigen Typ wählt, da dies jedoch die extrahierten Programme später unnötig aufbläht, wählen wir einen anderen Weg: Wir definieren den Typ $\tau(A)$ nur für „ konstruktiv interpretierbare" Formeln, das sind solche, die in der ursprünglichen Fassung eine nichtleere Liste von Typen zugeordnet bekommen, für die anderen Formeln setzen wir $\tau(A) = \star$ (wobei $\star$ ein neues, fest gewähltes Symbol sei). Wir handeln uns dadurch zwar einigen technischen Aufwand durch ständig wiederkehrende Fallunterscheidungen nach $\tau(A) = \star$ in den Definitionen und Beweisen ein, dieser Aufwand wird aber, wie sich in der Praxis gezeigt hat, durch knappere und intuitivere extrahierte Programme belohnt.

Definition 2.1

$$
\begin{aligned}
\tau(P(\vec{t})) &:= \star \\
\tau(\exists x^\rho A) &:= \begin{cases} \rho \times \tau(A) & \textit{falls } \tau(A) \neq \star \\ \rho & \textit{sonst} \end{cases} \\
\tau(\forall x^\rho A) &:= \begin{cases} \rho \to \tau(A) & \textit{falls } \tau(A) \neq \star \\ \star & \textit{sonst} \end{cases} \\
\tau(A \to B) &:= \begin{cases} \tau(A) \to \tau(B) & \textit{falls } \tau(A) \neq \star \neq \tau(B) \\ \tau(B) & \textit{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$\tau(A \wedge B) \quad := \quad \begin{cases} \tau(A) \times \tau(B) & \textit{falls } \tau(B) \neq \star \neq \tau(A) \\ \tau(A) & \textit{falls } \tau(B) = \star \\ \tau(B) & \textit{sonst} \end{cases}$$

Lemma 2.1 *$\tau(A) = \star \iff A$ Harropformel*

Wir nennen eine Formel konstruktiv interpretierbar, wenn $\tau(A) \neq \star$ ist. Im folgenden steht $t^{\tau(A)}$ für einen Term vom Typ $\tau(A)$, falls A konstruktiv interpretierbar ist und für das Symbol ε sonst.

Definition 2.2 *Wir definieren $t^{\tau(A)}$ mr A für alle Formeln A:*

$$\begin{aligned}
\varepsilon\, mr\, P(\vec{t}) \quad &:= \quad P(\vec{t}) \\
t\, mr\, \exists x\, A \quad &:= \quad \begin{cases} \pi_2(t)\, mr\, A[x \mapsto \pi_1(t)] & \textit{falls } \tau(A) \neq \star \\ \varepsilon\, mr\, A[x \mapsto t] & \textit{sonst} \end{cases} \\
t\, mr\, \forall x\, A \quad &:= \quad \begin{cases} \forall x\, tx\, mr\, A & \textit{falls } \tau(A) \neq \star \\ \forall x\, \varepsilon\, mr\, A & \textit{sonst} \end{cases} \\
t\, mr\, (A \to B) \quad &:= \quad \begin{cases} \forall x.\, x\, mr\, A \to tx\, mr\, B & \textit{falls } \tau(A) \neq \star \neq \tau(B) \\ \varepsilon\, mr\, A \to t\, mr\, B & \textit{falls } \tau(A) = \star \\ \forall x.\, x\, mr\, A \to \varepsilon\, mr\, B & \textit{sonst} \end{cases} \\
t\, mr\, (A \wedge B) \quad &:= \quad \begin{cases} \pi_1 t\, mr\, A \wedge \pi_2 t\, mr\, B & \textit{falls } \tau(A) \neq \star \neq \tau(B) \\ \varepsilon\, mr\, A \wedge t\, mr\, B & \textit{falls } \tau(A) = \star \\ t\, mr\, A \wedge \varepsilon\, mr\, B & \textit{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

Lemma 2.2 *1. $FV(t\, mr\, A) \subseteq FV(t) \cup FV(A)$*

2. $(t\, mr\, A)[x \mapsto s] = \begin{cases} t[x \mapsto s]\, mr\, A[x \mapsto s] & \textit{falls } \tau(A) \neq \star \\ \varepsilon\, mr\, A[x \mapsto s] & \textit{sonst} \end{cases}$

3. t mr A ist eine negative Formel.

4. Für negative Formeln A gilt $\varepsilon\, mr\, A = A$.

2.2 Programmextraktion

Die Programmextraktion gibt uns die Möglichkeit, aus einem Beweis einer konstruktiv interpretierbaren Formel A einen Zeugen für diese Aussage zu gewinnen, also einen Term $t^{\tau(A)}$, so daß $t\, mr\, A$ beweisbar ist. Sei dazu zu jeder Annahmevariable u^A einer konstruktiv interpretierbaren Formel A eine neue (das heißt in den betrachteten Beweistermen noch nicht verwendete) Objektvariable $x_u^{\tau(A)}$ und eine Annahmevariable $\tilde{u}^{x_u\, mr\, C}$, sowie zu jeder Annahmevariable u^A einer Harropformel A eine Annahmevariable $\tilde{u}^{\varepsilon\, mr\, A}$ gegeben. Für eine Menge $\mathcal{A}$ von Annahmevariablen sei $\tilde{\mathcal{A}} := \{\tilde{u} : u \in \mathcal{A}\}$. Eine Formel A heißt realisierbar in Γ, wenn es $t^{\tau(A)}$ gibt mit $\Gamma \vdash t\ mr\ A$.

Ein besonders einfaches Beispiel für in HA^μ realisierbare Formeln sind

$$mr_A^+ := \begin{cases} A \to \exists x^{\tau(A)}\, x\, mr\, A & \text{falls } \tau(A) \neq \star \\ A \to \varepsilon\, mr\, A & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$mr_A^- := \begin{cases} \exists x^{\tau(A)}\, x\, mr\, A \to A & \text{falls } \tau(A) \neq \star \\ \varepsilon\, mr\, A \to A & \text{sonst} \end{cases}$$

die für konstruktiv interpretierbare A durch die Identität $\lambda x^{\tau(A)} x$ realisiert werden. Man beachte, daß diese Formeln zwar in HA^μ realisierbar sind, in den meisten Modellen von HA^μ - abgesehen vom vollen mengentheoretischen Modell - jedoch nicht gültig sind. Der Grund dafür ist, daß nicht jede Abbildung $f : D_\rho \to D_\sigma$ von einem Objekt $a \in D_{\rho\to\sigma}$ repräsentiert sein muß.
Trotzdem werden wir diese Formeln im letzten Kapitel in einigen Beweisen benutzen, sie werden jedoch am Ende wieder eliminiert.

Definition 2.3 *(Programmextraktion) Sei zu jedem konstruktiv interpretierbaren Axiom $A \in \Gamma$ ein geschlossener Term $t_A^{\tau(A)}$ gegeben. Dann definieren wir für alle Beweisterme $M : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow B$ das Objekt $et(M)^{\tau(B)}$:*

$$et(u^A) := \begin{cases} x_u & \textit{falls } \tau(A) \neq \star \\ \varepsilon & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$et(c^A) := \begin{cases} t_A & \textit{falls } \tau(A) \neq \star \\ \varepsilon & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$et(\lambda u^A M^B) := \begin{cases} \lambda x_u et(M) & \textit{falls } \tau(A) \neq \star \neq \tau(B) \\ et(M) & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$et(M^{A\to B} N^A) := \begin{cases} et(M)et(N) & \textit{falls } \tau(A) \neq \star \neq \tau(B) \\ et(M) & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$et(\langle M^A, N^B\rangle) := \begin{cases} \langle et(M), et(N)\rangle & \textit{falls } \tau(A) \neq \star \neq \tau(B) \\ et(M) & \textit{falls } \tau(B) = \star \\ et(N) & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$et(\pi_i M^{A_1\wedge A_2}) := \begin{cases} \pi_i et(M) & \textit{falls } \tau(A_1) \neq \star \neq \tau(A_2) \\ et(M) & \textit{falls } \tau(A_1 \wedge A_2) = \tau(A_i) \\ \varepsilon & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$et(\lambda x M^A) := \begin{cases} \lambda x et(M) & \textit{falls } \tau(A) \neq \star \\ \varepsilon & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$et(M^{\forall x A} t) := \begin{cases} et(M)t & \textit{falls } \tau(A) \neq \star \\ \varepsilon & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$et(\exists^+_{\exists x A, t} M) := \begin{cases} \langle t, et(M)\rangle & \textit{falls } \tau(A) \neq \star \\ t & \textit{sonst} \end{cases}$$

$$et(\exists^-_{\exists x A, B} MN) := \begin{cases} et(N)(\pi_1 et(M))(\pi_2 et(M)) & \textit{falls } \tau(A) \neq \star \neq \tau(B) \\ et(N)et(M) & \textit{falls } \tau(A) = \star \neq \tau(B) \\ \varepsilon & \textit{sonst} \end{cases}$$

Satz 2.1 *(Korrektheit der Programmextraktion) Sind alle Formeln $A \in \Gamma$ in Σ realisierbar mit Realisierer t_A, falls $\tau(A) \neq \star$, so gibt es zu jedem Beweis $M : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow B$ einen Beweis $\mu(M) : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow et(M)\, mr\, B$.*

Beweis durch Induktion über den Aufbau von M, wir unterdrücken in den angegebenen Beweistermen die verwendeten Gleichheitsaxiome, indem wir Terme mit gleicher Normalform identifizieren, vgl. Lemma 1.10.

- u^A: $\mu(u) := \tilde{u}$.
- c^B: $\mu(c^B) : \Sigma, \{\} \Rightarrow et(c)\, mr\, B$ existiert, da nach Voraussetzung B in Σ realisierbar ist (mit Realisierer t_B, falls $\tau(B) \neq \star$).
- $\lambda u^A M^B : \Gamma, \mathcal{A} \setminus \{u^A\} \Rightarrow A \to B$:

  Die Induktionsvoraussetzung für M besagt

  $$\mu(M) : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow et(M)\, mr\, B$$

  1. $\tau(A) \neq \star$: zu zeigen ist

  $$\mu(\lambda u M) := \lambda x_u \lambda \tilde{u} \mu(M) : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \setminus \{\tilde{u}\} \Rightarrow et(\lambda u M)\, mr\, (A \to B)$$

  1.1. $\tau(B) \neq \star$: Dann ist $et(\lambda u M)\, mr\, (A \to B) = \lambda x_u et(M)\, mr\, (A \to B) = \forall x_u .\, x_u\, mr\, A \to (\lambda x_u et(M)) x_u\, mr\, B = \forall x_u .\, x_u\, mr\, A \to et(M)\, mr\, B$

  1.2. $\tau(B) = \star$: $et(\lambda u M)\, mr\, (A \to B) = \varepsilon\, mr\, (A \to B) = \forall x_u .\, x_u\, mr\, A \to \varepsilon\, mr\, B = \forall x_u .\, x_u\, mr\, A \to et(M)\, mr\, B$

  2. $\tau(A) = \star$: zu zeigen ist

  $$\mu(\lambda u M) := \lambda \tilde{u} \mu(M) : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \setminus \{\tilde{u}\} \Rightarrow et(\lambda u M)\, mr\, (A \to B)$$

  Dies gilt wegen $et(\lambda u M)\, mr\, (A \to B) = et(M)\, mr\, (A \to B) = \varepsilon\, mr\, A \to et(M)\, mr\, B$.

- $M^{A \to B} N^A : \Gamma, \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \Rightarrow B$. Induktionsvoraussetzung:

  $$\mu(M) : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow et(M)\, mr\, (A \to B)$$
  $$\mu(N) : \Sigma, \tilde{\mathcal{B}} \Rightarrow et(N)\, mr\, A$$

  1. $\tau(A) \neq \star$: z.z.

  $$\mu(MN) := \mu(M) et(N) \mu(N) : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow et(MN)\, mr\, B$$

  1.1. $\tau(B) \neq \star$: $et(MN) = et(M) et(N)$ und $et(M)\, mr\, (A \to B) = \forall x .\, x\, mr\, A \to et(M) x\, mr\, B$.

  1.2. $\tau(B) = \star$: $et(MN) = \varepsilon = et(N)$ und $et(M)\, mr\, (A \to B) = \varepsilon\, mr\, (A \to B) = \forall x .\, x\, mr\, A \to \varepsilon\, mr\, B$.

  2. $\tau(A) = \star$:

  $$\mu(MN) := \mu(M) \mu(N) : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow et(MN)\, mr\, B$$

  folgt aus $et(M)\, mr\, (A \to B) = \varepsilon\, mr\, A \to et(M)\, mr\, B$,$et(MN) = et(M)$ und $et(N) = \varepsilon$.

- $\langle M_1^{A_1}, M_2^{A_2}\rangle : \Gamma, \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \Rightarrow A_1 \wedge A_2$. Induktionsvoraussetzung:

  $$\mu(M_i) : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}}_i \Rightarrow et(M_i)\, mr\, A_i \quad \text{(i = 1,2)}$$

  Wir beschränken uns auf den Fall $\tau(A_1) \neq \star \neq \tau(A_2)$:

  $$\mu(\langle M_1, M_2\rangle) := \langle \mu(M_1), \mu(M_2)\rangle : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}}_1 \cup \tilde{\mathcal{A}}_2 \Rightarrow et(\langle M_1, M_2\rangle)\, mr\, (A_1 \wedge A_2)$$

  folgt aus $et(\langle M_1, M_2\rangle)\, mr\, (A_1 \wedge A_2) = \langle et(M_1), et(M_2)\rangle\, mr\, (A_1 \wedge A_2) = \pi_1\langle et(M_1), et(M_2)\rangle\, mr\, A_1 \wedge \pi_2\langle et(M_1), et(M_2)\rangle\, mr\, A_2 = et(M_1)\, mr\, A_1 \wedge et(M_2)\, mr\, A_2$.

  Die anderen Fälle beweist man analog.

- $\pi_i(M^{A_1 \wedge A_2}) : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow A_i$. Induktionsvoraussetzung:

  $$\mu(M) : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow et(M)\, mr\, (A_1 \wedge A_2)$$

  Wir beschränken uns wieder auf den Fall $\tau(A_1) \neq \star \neq \tau(A_2)$: Wegen $et(M)\, mr\, (A_1 \wedge A_2) = \pi_1 et(M)\, mr\, A_1 \wedge \pi_2 et(M)\, mr\, A_2$ und $et(\pi_i M) = \pi_i et(M)$ gilt offensichtlich

  $$\mu(\pi_i(M)) := \pi_i \mu(M) : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow et(\pi_i M)\, mr\, A_i.$$

- $\lambda x^\rho M^A : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow \forall x\, A$ mit $x \notin \bigcup_{u^A \in \mathcal{A}} FV(A)$. Induktionsvoraussetzung:

  $$\mu(M) : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow et(M)\, mr\, A,$$

  zu zeigen ist

  $$\mu(\lambda x M) := \lambda x \mu(M) : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow et(\lambda x M)\, mr\, \forall x\, A.$$

  Die Variablenbedingung für die Bildung von $\lambda x \mu(M)$ folgt nach Lemma 2.2, Teil 1, aus der Variablenbedingung für $\lambda x M$ und daraus, daß die Variablen x_u als hinreichend neu angenommen wurden.

  1. $\tau(A) \neq \star$, also $et(\lambda x M)\, mr\, \forall x\, A = \lambda x et(M)\, mr\, \forall x\, A = \forall x\, (\lambda x et(M)) x\, mr\, A = \forall x\, et(M)\, mr\, A$.

  2. $\tau(A) = \star$, also $et(\lambda x M)\, mr\, \forall x\, A = \varepsilon\, mr\, \forall x\, A = \forall x\, \varepsilon\, mr\, A$.

- $M^{\forall x\, A} t : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow A[x \mapsto t]$. Induktionsvoraussetzung:

  $$\mu(M) : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow et(M)\, mr\, \forall x\, A,$$

  wir zeigen

  $$\mu(Mt) := \mu(M)t : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow et(Mt)\, mr\, A[x \mapsto t]$$

  1. $\tau(A) \neq \star$, dann ist $et(M)\, mr\, \forall x\, A = \forall x\, et(M)x\, mr\, A$ und $et(Mt)\, mr\, A[x \mapsto t] = et(M)t\, mr\, A[x \mapsto t]$.

  2. $\tau(A) = \star$, also $et(M) = \varepsilon = et(Mt)$.

- $\exists^+_{\exists x\, A,t} M^{A[x\mapsto t]} : \Gamma, \mathcal{A} \Rightarrow \exists x^\rho\, A$. Induktionsvoraussetzung:

$$\mu(M) : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow et(M)\, mr\, A[x \mapsto t],$$

  wir zeigen

$$\mu(\exists^+_{\exists x\, A,t} M) := \mu(M) : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow et(\exists^+_{\exists x\, A,t} M)\, mr\, \exists x\, A.$$

  1. $\tau(A) \neq \star$, also $et(\exists^+_{\exists x\, A,t} M)\, mr\, \exists x\, A = \langle t, et(M)\rangle\, mr\, \exists x\, A = \pi_2\langle t, et(M)\rangle\, mr\, A[x \mapsto \pi_1\langle t, et(M)\rangle] = et(M)\, mr\, A[x \mapsto t]$.

  2. $\tau(A) = \star$, also $et(\exists^+_{\exists x\, A,t} M)\, mr\, \exists x\, A = t\, mr\, \exists x\, A = \varepsilon\, mr\, A[x \mapsto t] = et(M)\, mr\, A[x \mapsto t]$.

- $\exists^-_{\exists x\, A,B} MN : \Gamma, \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \Rightarrow B$. Induktionsvoraussetzung:

$$\mu(M) : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow et(M)\, mr\, \exists x\, A$$
$$\mu(N) : \Sigma, \tilde{\mathcal{B}} \Rightarrow et(N)\, mr\, \forall x.\, A \to B$$

  1. $\tau(A) \neq \star$, z.z.

$$\mu(\exists^-_{\exists x\, A,B} MN) := \mu(N)(\pi_1 et(M))(\pi_2 et(M))\mu(M) :$$
$$\Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \cup \tilde{\mathcal{B}} \Rightarrow et(\exists^-_{\exists x\, A,B} MN)\, mr\, B$$

  1.1. $\tau(B) \neq \star$, also $et(N)\, mr\, \forall x.\, A \to B = \forall x, y.\, y\, mr\, A \to et(N)xy\, mr\, B$, $et(M)\, mr\, \exists x\, A = \pi_2 et(M)\, mr\, A[x \mapsto \pi_1 et(M)]$ und $et(\exists^-_{\exists x\, A,B} MN) = et(N)(\pi_1 et(M))(\pi_2 et(M))$.

  1.2. $\tau(B) = \star$, also $et(N)\, mr\, \forall x.\, A \to B = \forall x, y.\, y\, mr\, A \to \varepsilon\, mr\, B$, $et(M)\, mr\, \exists x\, A = \pi_2 et(M)\, mr\, A[x \mapsto \pi_1 et(M)]$.

  2. $\tau(A) = \star$, wir zeigen

$$\mu(\exists^-_{\exists x\, A,B} MN) := \mu(N)et(M)\mu(M) : \Sigma, \tilde{\mathcal{A}} \cup \tilde{\mathcal{B}} \Rightarrow et(\exists^-_{\exists x\, A,B} MN)\, mr\, B$$

  2.1. $\tau(B) \neq \star$, also $et(N)\, mr\, \forall x.\, A \to B = \forall x.\, \varepsilon\, mr\, A \to et(N)x\, mr\, B$, $et(M)\, mr\, \exists x\, A = \varepsilon\, mr\, A[x \mapsto et(M)]$ und $et(\exists^-_{\exists x\, A,B} MN) = et(N)et(M)$.

  2.2. $\tau(B) = \star$, also $et(N)\, mr\, \forall x.\, A \to B = \forall x.\, \varepsilon\, mr\, A \to \varepsilon\, mr\, B$ und $et(M)\, mr\, \exists x\, A = \varepsilon\, mr\, A[x \mapsto et(M)]$.

Schließlich zeigen wir noch, daß alle HA^μ-Axiome in HA^μ realisierbar sind: Für $(\top), (EFQ_P), (Stab_P), (Trans_\rho), (Symm_\rho)$ und $(Conv_\rho^{s\mapsto t})$ ist das trivial, da es sich dabei ausschließlich um negative Formeln handelt. Zum Axiomenschema $(Repl_\rho^A)$: Ist A Harropformel, so ist

$$\varepsilon\, mr\, \forall x, y.\, x = y \to A \to A[x \mapsto y] =$$
$$\forall x, y.\, x = y \to \varepsilon\, mr\, A \to (\varepsilon\, mr\, A)[x \mapsto y],$$

ist A konstruktiv interpretierbar, so ist

$$\begin{aligned}(\lambda x, y, z^{\tau(A)}.z)\, mr\, \forall x, y.\, x = y \to A \to A[x \mapsto y] = \\ \forall x, y, z.\, x = y \to z\, mr\, A \to (z\, mr\, A)[x \mapsto y]\end{aligned}$$

und beide Formeln sind selbst wieder Instanzen desselben Axiomenschemas.
Nun zu den Induktionsaxiomen: Ist A Harropformel, so sieht man leicht ein, daß $\varepsilon\, mr\, Ind_\mu^{\forall w\, A} = Ind_\mu^{\forall w\, \varepsilon\, mr\, A}$ ist. Ist A konstruktiv interpretierbar, so wählen wir als realisierenden Term den Rekursionsoperator R_τ^μ mit $\tau := \tau(A)$. Sei $\mu = \mu\alpha(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$:

$$\begin{aligned}R_\tau^\mu\, mr\, (Ind_\mu^{\forall w\, A}) \leftrightarrow \\ \forall \vec{s}.\, s_1\, mr\, SF_{\mu,1}^{\forall w\, A} \to \dots \to s_n\, mr\, SF_{\mu,n}^{\forall w\, A} \to \forall w\, (R_\tau^\mu \vec{s} w)\, mr\, A\end{aligned}$$

Seien also $\vec{s}$ gegeben und gelte $s_i\, mr\, SF_{\mu,i}^{\forall w\, A}$ für $i = 1, \dots, n$. Wir zeigen

$$\forall w^\mu\, (R_\tau^\mu \vec{s} w)\, mr\, A$$

durch Induktion nach w, d.h. wir müssen $SF_{\mu,i}^{\forall w\, (R_\tau^\mu \vec{s} w)\, mr\, A}$ für $i = 1, \dots, n$ zeigen, sei dazu $\kappa_i = \vec{\rho} \to (\vec{\sigma}_1 \to \alpha) \to \dots \to (\vec{\sigma}_m \to \alpha) \to \alpha$:

$$\begin{aligned}SF_{\mu,i}^{\forall w\, (R_\tau^\mu \vec{s} w)\, mr\, A} &= \forall \vec{x}^{\vec{\rho}}, f_1^{\vec{\sigma}_1 \to \mu}, \dots, f_m^{\vec{\sigma}_m \to \mu}. \\ &IV_{\mu,i,1}^{\forall w\, (R_\tau^\mu \vec{s} w)\, mr\, A}(f_1) \to \dots \to IV_{\mu,i,m}^{\forall w\, (R_\tau^\mu \vec{s} w)\, mr\, A}(f_m) \to \\ &((R_\tau^\mu \vec{s} w)\, mr\, A)[w \mapsto K_i^\mu \vec{x} \vec{f}]\end{aligned}$$

Seien also $\vec{x}$ und $\vec{f}$ gegeben und gelte $IV_{\mu,i,j}^{\forall w\, (R_\tau^\mu \vec{s} w)\, mr\, A}(f_j)$ für $j = 1, \dots, m$, wir müssen

$$\begin{aligned}&((R_\tau^\mu \vec{s} w)\, mr\, A)[w \mapsto K_i^\mu \vec{x} \vec{f}] = \\ &(R_\tau^\mu \vec{s} (K_i^\mu \vec{x} \vec{f}))\, mr\, A[w \mapsto K_i^\mu \vec{x} \vec{f}] = \\ &s_i \vec{x} \vec{f} ((R_\tau^\mu \vec{s}) \circ f_1) \dots ((R_\tau^\mu \vec{s}) \circ f_m)\, mr\, A[w \mapsto K_i^\mu \vec{x} \vec{f}]\end{aligned}$$

zeigen. Wir erhalten dies aus

$$\begin{aligned}&s_i\, mr\, SF_{\mu,i}^{\forall w\, A} \leftrightarrow \\ &\forall \vec{x}^{\vec{\rho}}, f_1^{\vec{\sigma}_1 \to \mu}, \dots, f_m^{\vec{\sigma}_m \to \mu}, g_1^{\vec{\sigma}_1 \to \tau}, \dots, g_m^{\vec{\sigma}_m \to \tau}. \\ &\quad g_1\, mr\, IV_{\mu,i,1}^{\forall w\, A}(f_1) \to \dots \to g_m\, mr\, IV_{\mu,i,m}^{\forall w\, A}(f_n) \to \\ &\quad (s_i \vec{x} \vec{f} \vec{g})\, mr\, A[w \mapsto K_i^\mu \vec{x} \vec{f}]\end{aligned}$$

mittels $g_j := ((R_\tau^\mu \vec{s}) \circ f_j)$ für $(j = 1, \dots, m)$, falls wir

$$((R_\tau^\mu \vec{s}) \circ f_j)\, mr\, IV_{\mu,i,j}^{\forall w\, A}(f_j)$$

für $j = 1, \ldots, m$ zeigen können, dies folgt aber gerade aus

$$
\begin{aligned}
&IV_{\mu,i,j}^{\forall w\,(R_\tau^\mu \vec{s} w)\,mr\,A}(f_j) = \\
&\forall \vec{v}.\,((R_\tau^\mu \vec{s} w)\,mr\,A)[w \mapsto f_j \vec{v}] = \\
&\forall \vec{v}.\,(R_\tau^\mu \vec{s}(f_j \vec{v})\,mr\,A[w \mapsto f_j \vec{v}] = \\
&\forall \vec{v}.\,((R_\tau^\mu \vec{s}) \circ f_j)\vec{v}\,mr\,A[w \mapsto f_j \vec{v}] = \\
&(R_\tau^\mu \vec{s}) \circ f_j\,mr\,IV_{\mu,i,j}^{\forall w\,A}(f_j)
\end{aligned}
$$

Kapitel 3

Induktive Definitionen

In diesem Kapitel zeigen wir, wie man das System HA^{μ}, oder Erweiterungen davon, um eine induktiv definierte Menge erweitern kann, so daß sich die Programmextraktion auf dieses System überträgt. Durch Iteration dieses Erweiterungsverfahrens erhält man so eine konstruktive Interpretation für intuitionistische Systeme endlich iterierter strikt positiver Induktionen.
Als Vorbereitung beschreiben wir kurz die mengentheoretischen Grundlagen induktiver Definitionen. Dann stellen wir unseren Ansatz zur Formalisierung vor und zeigen, wie man dafür eine konstruktive Interpretation erhält. Schließlich geben wir ein Beispiel einer induktiv definierten Menge, den erreichbaren Anteil einer zweistelligen Relation, und analysieren die Realisierer, die wir in diesem Fall erhalten.

3.1 Fixpunkte monotoner Operatoren

Sei M eine beliebige Menge und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge. Ein Operator $\Phi : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ heißt monoton, falls gilt:

$$X \subseteq Y \subseteq M \Rightarrow \Phi(X) \subseteq \Phi(Y).$$

$X \subseteq M$ heißt Fixpunkt von Φ, falls $\Phi(X) = X$ ist. Wir zeigen, daß

$$I_{\Phi} := \bigcap \{X \subseteq M : \Phi(X) \subseteq X\}$$

ein Fixpunkt von Φ ist ($\{X \subseteq M : \Phi(X) \subseteq X\}$ ist nicht leer, da $\Phi(M) \subseteq M$ gilt):

Lemma 3.1 *1.* $\Phi(X) \subseteq X \Rightarrow I_{\Phi} \subseteq X$

2. $\Phi(I_{\Phi}) \subseteq I_{\Phi}$

3. $\Phi(X \cap I_{\Phi}) \subseteq X \Rightarrow I_{\Phi} \subseteq X$

4. $\Phi(I_{\Phi}) = I_{\Phi}$

Beweis:
1. folgt direkt aus der Definition von I_Φ.
2. $\Phi(I_\Phi) = \Phi(\bigcap\{X \subseteq M : \Phi(X) \subseteq X\}) \subseteq \bigcap\{\Phi(X) : X \subseteq M, \Phi(X) \subseteq X\} \subseteq \bigcap\{X \subseteq M : \Phi(X) \subseteq X\} = I_\Phi$
3. Aus 2. und der Monotonie von Φ folgt $\Phi(X \cap I_\Phi) \subseteq I_\Phi$ und damit $\Phi(X \cap I_\Phi) \subseteq X \cap I_\Phi$. Also gilt nach 1. $I_\Phi \subseteq X \cap I_\Phi$, das heißt $I_\Phi \subseteq X$.
4. Wieder mit 2. und der Monotonie von Φ erhält man $\Phi(\Phi(I_\Phi)) \subseteq \Phi(I_\Phi)$ und damit nach 1. $I_\Phi \subseteq \Phi(I_\Phi)$.

3.2 Formalisierungen induktiver Definitionen

In formalen Systemen induktiver Definitionen wird der monotone Operator Φ normalerweise gegeben durch eine positive Operatorform, das heißt eine Formel $\mathcal{A}$ aus $\mathcal{L}[X] := \mathcal{L} \cup \{(X, (\rho))\}$ mit einem neuen einstelligen Prädikatensymbol $X : [\rho]$, das in $\mathcal{A}$ nur positiv auftritt, und $FV(\mathcal{A}) \subseteq \{x_0^\rho\}$. Der monotone Operator $\Phi_\mathcal{A}$ ergibt sich daraus relativ zu einem Modell $\mathcal{M} = ((D_\rho)_\rho, I(\cdot), [\![\cdot]\!]_\cdot)$ für $\mathcal{L}$ durch

$$\Phi_\mathcal{A}(N) := \{a \in D_\rho : \mathcal{M}_X^N \models \mathcal{A}[\xi_{x_0}^a]\},$$

wobei ξ eine beliebige Belegung und $\mathcal{M}_X^N$ das Modell für $\mathcal{L}[X]$ sei, das X durch $N \subseteq D_\rho$ interpretiert und sonst mit $\mathcal{M}$ übereinstimmt (Aufgrund des Koinzidenzlemmas hängt die Definition nicht von ξ ab).
Die Monotonie von $\Phi_\mathcal{A}$ ergibt sich aus der Positivität von X in $\mathcal{A}$, somit hat $\Phi_\mathcal{A}$ nach Abschnitt 3.1 einen kleinsten Fixpunkt $I_\mathcal{A} := I_{\Phi_\mathcal{A}}$. Betrachtet man nun die Sprache $\mathcal{L}[P_\mathcal{A}]$ mit $P_\mathcal{A} : [\rho]$, so gelten in dem Modell $\mathcal{M}_{P_\mathcal{A}}^{I_\mathcal{A}}$ folgende Axiome als Korollare zu Lemma 3.1, 1.-3.:

$$\forall x_0.\, \mathcal{A}[P_\mathcal{A}(x_0)] \to P_\mathcal{A}(x_0)$$

$$(\forall x_0.\, \mathcal{A}[A] \to A) \to \forall x_0.\, P_\mathcal{A}(x_0) \to A$$

$$(\forall x_0.\, \mathcal{A}[A \wedge P_\mathcal{A}(x_0)] \to A) \to \forall x_0.\, P_\mathcal{A}(x_0) \to A$$

für alle Formeln $A \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}[P_\mathcal{A}]}$, wobei $\mathcal{A}[A]$ aus $\mathcal{A}$ durch Ersetzung aller Teilformeln $X(t)$ durch $A[x_0 \mapsto t]$ entsteht.
Wir nennen diese Formeln Abschluß-, sowie schwaches und starkes Induktionsaxiom zu $P_\mathcal{A}$.
Wir werden die induktiven Definitionen in unserem System jedoch etwas anders formalisieren: Zur Definition des monotonen Operators gehen wir von einer endlichen Liste von geschlossenen Klauseln $\mathcal{K}$ der Form

$$\forall \vec{x}.\, \vec{A} \to (\forall \vec{y}_1.\, \vec{B}_1 \to X(s_1)) \to \ldots \to (\forall \vec{y}_n.\, \vec{B}_n \to X(s_n)) \to Y(t) \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}[X,Y]}$$

mit $X, Y : [\rho]$ und Formeln $\vec{A}, \vec{B}_1, \ldots, \vec{B}_n \in \mathcal{F}_\mathcal{L}$ mit $FV(\mathcal{K}) \subseteq \{x_0\}$ aus. Wie zuvor steht $\mathcal{K}[A, B]$ für die Formel, die durch Einsetzung von A für X und B für Y entsteht. Das zusätzliche Prädikatensymbol Y benötigen wir nur, um später die starke Fassung des Induktionsaxioms bequem angeben zu können. In allen

anderen Fällen werden wir für X und Y dieselbe Formel einsetzen, wir schreiben dann $\mathcal{K}[A]$ für $\mathcal{K}[A, A]$.
Den Operator $\Phi_{\mathcal{K}}$ zu einer solchen Klausel definieren wir durch

$$\Phi_{\mathcal{K}}(N) := \{[\![t]\!]_\xi : \xi \text{ Belegung}, \mathcal{M}_X^N \models (\bigwedge \vec{A} \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (\forall \vec{y}_i.\, \vec{B}_i \to X(s_i))[\xi]\}$$

und den Operator $\Phi_{\vec{\mathcal{K}}}$ zu einer Liste $\mathcal{K}_1, \ldots, \mathcal{K}_n$ von Klauseln als Vereinigung der einzelnen Operatoren:

$$\Phi_{\vec{\mathcal{K}}}(N) := \Phi_{\mathcal{K}_1}(N) \cup \ldots \cup \Phi_{\mathcal{K}_n}(N)$$

Wie zuvor ist die Monotonie von $\Phi_{\vec{\mathcal{K}}}$ offensichtlich, $I_{\vec{\mathcal{K}}} := I_{\Phi_{\vec{\mathcal{K}}}}$ sei der zugehörige Fixpunkt und $\mathcal{M}_{P_{\vec{\mathcal{K}}}}^{I_{\vec{\mathcal{K}}}}$ das entsprechende Modell, in dem dann wieder die Abschluß- und Induktionsaxiome gelten:

$$\mathcal{K}_i[P_{\vec{\mathcal{K}}}(x_0)] \qquad \text{für alle i=1,\ldots,n}$$

$$\mathcal{K}_1[A] \to \ldots \to \mathcal{K}_n[A] \to \forall x_0.\, P_{\vec{\mathcal{K}}}(x_0) \to A$$

$$\mathcal{K}_1[A \wedge P_{\vec{\mathcal{K}}}(x_0), A] \to \ldots \to \mathcal{K}_n[A \wedge P_{\vec{\mathcal{K}}}(x_0), A] \to \forall x_0.\, P_{\vec{\mathcal{K}}}(x_0) \to A$$

Die Darstellung einer induktiven Definition durch eine Liste von Klauseln, deren Form explizit angegeben werden kann, wurde hier vor allem aus technischen Gründen gewählt, sie entspricht aber gleichzeitig der Form, in der induktive Definitionen in der mathematischen Praxis meist angegeben werden. Tatsächlich sind beide Darstellungen nahezu äquivalent, wenn man sich bei den Operatorformen auf solche beschränkt, in denen X nur *strikt* positiv auftritt:

Lemma 3.2 *Ist $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}[X]}$ Harropformel und tritt X in $\mathcal{A}$ nur strikt positiv auf, so gibt es Harropformeln $\vec{A}$ mit $A_i \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ oder A_i von der Form $\forall \vec{y}.\, \vec{B} \to X(t)$ mit $\vec{B} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$, so daß $\vdash \mathcal{A} \leftrightarrow \bigwedge \vec{A}$ gilt.*

Beweis: $\mathcal{A}$ ist Element der wie folgt gebildeten Formelmenge Γ:

$$\frac{A \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}}{A \in \Gamma} \qquad \frac{}{X(t) \in \Gamma} \qquad \frac{A \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}} \quad B \in \Gamma}{A \to B \in \Gamma}$$

$$\frac{A, B \in \Gamma}{A \wedge B \in \Gamma} \qquad \frac{A \in \Gamma}{\forall x\, A \in \Gamma}$$

Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $\mathcal{A} \in \Gamma$:
$\mathcal{A} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}}$ oder $\mathcal{A} = X(t)$: klar.
$\mathcal{A} = A \to \mathcal{A}'$: Gelte $\vdash \mathcal{A}' \leftrightarrow A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$, dann folgt $\vdash \mathcal{A} \leftrightarrow (A \to A_1) \wedge \ldots \wedge (A \to A_n)$ und für $A_i = \forall \vec{y}.\, \vec{B} \to X(t)$ gilt $\vdash (A \to A_i) \leftrightarrow \forall \vec{z}.\, A \to (\vec{B} \to X(t))[\vec{y} \mapsto \vec{z}]$ mit $\vec{z} \notin FV(A)$.
$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2$: klar
$\mathcal{A} = \forall x\, \mathcal{A}'$: $\vdash \mathcal{A}' \leftrightarrow A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \;\Rightarrow\; \vdash \mathcal{A} \leftrightarrow \forall x\, A_1 \wedge \ldots \wedge \forall x\, A_n$

Korollar 3.1 *Ist $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_{\mathcal{L}[X]}$ Harropformel und tritt X in $\mathcal{A}$ nur strikt positiv auf, so gibt es eine Klausel $\mathcal{K}$ mit*

$$\vdash (\forall x_0 .\, \mathcal{A}[P_{\mathcal{A}}(x_0)] \to P_{\mathcal{A}}(x_0)) \leftrightarrow \mathcal{K}[P_{\mathcal{A}}(x_0)].$$

Korollar 3.2 *Ist $\mathcal{A}$ strikt positive Operatorform und keine Harropformel, so gibt es eine Klausel $\mathcal{K}$ mit*

$$\vdash (\forall x_0 .\, \exists y\, (y\, mr\, \mathcal{A}[P_{\mathcal{A}}(x_0)]) \to P_{\mathcal{A}}(x_0)) \leftrightarrow \mathcal{K}[P_{\mathcal{A}}(x_0)].$$

Beweis: $(\forall x_0 .\, \exists y\, (y\, mr\, \mathcal{A}[P_{\mathcal{A}}(x_0)]) \to P_{\mathcal{A}}(x_0)) \leftrightarrow (\forall x_0, y .\, (y\, mr\, \mathcal{A}[P_{\mathcal{A}}(x_0)]) \to P_{\mathcal{A}}(x_0))$ und $(y\, mr\, \mathcal{A}[P_{\mathcal{A}}(x_0)])$ erfüllt die Voraussetzungen von Korollar 3.1.

Umgekehrt sieht man leicht ein, daß auch jede Definition durch eine Liste von Klauseln sich in eine Definition durch eine strikt positive Operatorform umwandeln läßt.

3.3 Realisierbarkeit

Eine naheliegende Idee, um den Mechanismus der Programmextraktion auf die induktiven Definitionen zu erweitern, wäre, die Definitionen für die mr-Interpretation und die extrahierten Terme aus dem ersten Kapitel unverändert zu übernehmen und nach realisierenden Termen für die Abschluß- und Induktionsaxiome für $P_{\vec{\mathcal{K}}}$ zu suchen. Insbesondere würde man also $\tau(P_{\vec{\mathcal{K}}}) = \star$ setzen, ein einfaches Beispiel zeigt aber, daß das Induktionsaxiom dann im allgemeinen in keinem konsistenten Axiomensystem, das HA^{μ} erweitert, realisierbar sein kann:

Sei $T : \mathsf{nat} \to \mathsf{nat} \to \mathsf{nat} \to \mathsf{boole}$ ein geschlossener Term, der das Kleenesche T-Prädikat berechnet, d.h. für natürliche Zahlen e, m, n gilt $\mathrm{Nf}(T\underline{emn}) = \mathsf{true}$ genau dann wenn e der Code eines Programms ist, das bei Input m nach n Schritten terminiert. Das Halteproblem läßt sich durch die Klausel

$$\mathcal{K}_T : \forall e, m, n .\, Temn \to Y(\langle e, m\rangle)$$

definieren. Dies ist ein ziemlich triviales Beispiel einer induktiven Definition, da X in der Prämisse der Klausel nicht auftaucht und somit keine wirklich induktive Erzeugung stattfindet, d.h. der zugehörige Operator $\Phi_{\mathcal{K}_T}$ ist konstant. Trotzdem sind schon die Induktionsaxiome für diese Klausel nicht realisierbar:
Das Induktionsaxiom zur Formel $\exists k\, T(\pi_1 x_0)(\pi_2 x_0)k$ lautet

$$\begin{gathered}(\forall e, m, n .\, Temn \to \exists k\, T(\pi_1\langle e, m\rangle)(\pi_2\langle e, m\rangle)k) \to \\ \forall x_0 .\, P_{\mathcal{K}_T}(x_0) \to \exists k\, T(\pi_1 x_0)(\pi_2 x_0)k\end{gathered}$$

Angenommen, ein Term t realisiere dieses Axiom, d.h. wir können zeigen

$$\begin{gathered}\forall f^{\mathsf{nat}\to\mathsf{nat}\to\mathsf{nat}\to\mathsf{nat}} .\, (\forall e, m, n .\, Temn \to Tem(femn)) \to \\ \forall x_0 .\, P_{\mathcal{K}_T}(x_0) \to T(\pi_1 x_0)(\pi_2 x_0)(tfx_0)\end{gathered}$$

Da mit $f = \lambda e, m, n.n$ die Prämisse trivial beweisbar wird, hätten wir ein Entscheidungsverfahren für das Halteproblem gefunden: Das Programm, dessen Code die Zahl e ist, terminiert bei Input n genau dann wenn $P_{\mathcal{K}_T}(\langle e, n\rangle)$ gilt und dies ist genau dann der Fall wenn $Ten(t(\lambda e, m, nn)\langle e, n\rangle)$ zu true normalisiert.

Das Problem bei der Realisierung der Induktionsaxiome besteht darin, daß wir zu einem Element von $I_{\vec{\mathcal{K}}}$ mehr konstruktive Information darüber benötigen, wie das Element in diese Menge gelangt ist. Wir setzen daher $\tau(P_{\vec{\mathcal{K}}}(t)) := \mu$ mit geeignet gewähltem Typ μ. Außerdem fügen wir ein zweistelliges Prädikat $\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}} : [\mu, \rho]$ zu unserer Sprache hinzu und setzen

$$t^{\mu}\, mr\, P_{\vec{\mathcal{K}}}(s) := \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(t, s)$$

sowie $\tau(\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(t, s)) := \star$, das heißt die mr –Interpretation für die Sprache $\mathcal{L}[\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}]$ ist wieder genau wie in Abschnitt 2.1 definiert. Die Aussage $\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(s, t)$ besagt, daß das durch t bezeichnete Objekt in der Menge $I_{\vec{\mathcal{K}}}$ liegt und das durch s bezeichnete Objekt Information darüber enthält, wie das Element in die Menge gelangt ist, anders ausgedrückt: s bezeichnet einen Erzeugungsbaum für $t \in I_{\vec{\mathcal{K}}}$. Die abgewandelte mr –Interpretation übersetzt eine Formel der Sprache $\mathcal{L}[P_{\vec{\mathcal{K}}}]$ in eine der Sprache $\mathcal{L}[\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}]$. Alternativ könnte man eine Übersetzung von $\mathcal{L}[P_{\vec{\mathcal{K}}}]$ nach $\mathcal{L}[\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}]$ definieren, indem man jede Teilformel der Gestalt $P_{\vec{\mathcal{K}}}(t)$ durch $\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, t)$ ersetzt. Die abgewandelte mr –Interpretation ist dann genau die Komposition der gewöhnlichen mr –Interpretation in $\mathcal{L}[\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}]$ mit dieser Übersetzung, d.h. für $A \in \mathcal{L}[P_{\vec{\mathcal{K}}}]$ gilt $t\, mr\, A = t\, mr\, (A[P_{\vec{\mathcal{K}}}(\cdot) \mapsto \exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, \cdot)])$, falls $A[P_{\vec{\mathcal{K}}}(\cdot) \mapsto \exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, \cdot)]$ die übersetzte Formel ist.
Es würde demnach naheliegen, nur noch die Sprache $\mathcal{L}[\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}]$ zu betrachten, es gibt jedoch gute Gründe, weiterhin mit $P_{\vec{\mathcal{K}}}$ zu arbeiten, wir werden darauf am Ende dieses Abschnitts noch einmal kurz eingehen.
Als Axiomatik für $\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}$ könnten wir die bereits angegebenen Abschluß- und Induktionsaxiome mit $\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, t)$ statt $P_{\vec{\mathcal{K}}}(t)$ verwenden, tatsächlich genügt hier aber eine etwas schwächere Axiomatik: Wir fordern, daß die Konstruktoren der Algebra μ die Abschlußaxiome realisieren, statt dem Induktionsaxiom verwenden wir aber nur so etwas wie die logische Umkehrung der Abschlußaxiome, die Realisierbarkeit des Induktionsaxioms läßt sich daraus mit Hilfe der strukturellen Induktion für den Typ μ herleiten.

Nun zu den formalen Definitionen: Der Typ μ läßt sich am einfachsten dadurch angeben, daß man die Definition des realisierenden Typs $\tau(A)$ einer Formel $A \in \mathcal{L}[X, Y]$ modifiziert, indem man $\tau(X(t)) := \tau(Y(t)) := \alpha$ setzt. $\tau(\mathcal{K})$ ist für eine Klausel $\mathcal{K}$ dann ein Konstruktortyp, wir können also $\mu = \mu\alpha(\tau(\vec{\mathcal{K}}), \alpha)$ setzen. Den letzten Konstruktortyp α benötigen wir dabei nur, um sicherzustellen, daß wir keinen leeren Typ erhalten (vgl. Bemerkung in Abschnitt 1.2). Ist dies aufgrund der Form von $\tau(\vec{\mathcal{K}})$ schon gewährleistet, könnte man diesen auch weglassen.

Die Axiome für $\hat{P}_{\mathcal{K}_1,\ldots,\mathcal{K}_n}$ lauten zum einen:

$$up_i^{\vec{\mathcal{K}}} : K_i^\mu \, mr \, \mathcal{K}_i[\exists w \, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0)]$$

für $i = 1, \ldots, n$. Ist

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_i &= \forall \vec{x}. \vec{A} \to (\forall \vec{z}_1. \vec{B}_1 \to X(s_1)) \to \ldots \to (\forall \vec{z}_m. \vec{B}_m \to X(s_m)) \to Y(t) \\ &=: \forall \vec{x}. \vec{A} \to \vec{C} \to Y(t),\end{aligned}$$

so lautet das Axiom $up_i^{\vec{\mathcal{K}}}$:

$$\begin{aligned}&\forall \vec{x}, \vec{y}^{\tau(\vec{A})}, f_1^{\tau(C_1)[\mu]}, \ldots, f_m^{\tau(C_m)[\mu]}. \\ &\quad \vec{y} \, mr \, \vec{A} \to \vec{f} \, mr \, (\vec{C}[\exists w \, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0)]) \to \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(K_i^\mu \vec{x}\vec{y}\vec{f}, t)\end{aligned}$$

Diese Aussage ist logisch äquivalent zu

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{f}, x_0. \, x_0 = t \wedge \vec{y} \, mr \, \vec{A} \wedge \vec{f} \, mr \, \vec{C}[\exists w \, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0)] \to \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(K_i^\mu \vec{x}\vec{y}\vec{f}, x_0)$$

Die Axiomatik für $\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}$ wird vervollständigt durch die Umkehrung dieser Formeln

$$\begin{aligned}down_i^{\vec{\mathcal{K}}} : \forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{f}, x_0. \, &\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(K_i^\mu \vec{x}\vec{y}\vec{f}, x_0) \to \\ &x_0 = t \wedge \vec{y} \, mr \, \vec{A} \wedge \vec{f} \, mr \, \vec{C}[\exists w \, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0)]\end{aligned}$$

für $i = 1, \ldots, n$, sowie

$$down_{n+1}^{\vec{\mathcal{K}}} := \forall x \, \neg \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(K_{n+1}^{\mu\alpha(\vec{\kappa})}, x).$$

Die Menge der $up^{\vec{\mathcal{K}}}$- und $down^{\vec{\mathcal{K}}}$-Axiome bezeichnen wir mit $(ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}})$.
Man beachte, daß die $(ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}})$-Axiome negative Formeln sind, somit sind sie trivialerweise in $(ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}})$ realisierbar. Insbesondere überträgt sich also der Mechanismus der Programmextraktion von HA^μ auf $HA^\mu + (ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}})$.
Das Modell $\mathcal{M}^\lambda$ kann nun leicht um eine Interpretation für $\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}$ erweitert werden, indem wir die angegebenen Axiome für die Definition von $I(\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}})(r^\mu, s^\rho)$ durch Induktion über die starke Berechenbarkeit von r verwenden:

$$\begin{aligned}&I(\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}})(K_i^\mu \vec{r_1}\vec{r_2}\vec{r_3}, s) :\Longleftrightarrow \\ &\quad \mathcal{M}^\lambda \models (x_0 = t \wedge \vec{y} \, mr \, \vec{A} \wedge \vec{f} \, mr \, (\vec{C}[\exists w \, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0)]))[\xi_{x_0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{f}}^{s, \vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}}]\end{aligned}$$

Man sieht leicht ein, daß die rechte Seite nur von Werten von $I(\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}})(r^\mu, s^\rho)$ abhängt, die aufgrund der Induktionsvoraussetzung schon definiert wurden und (wieder aufgrund des Koinzidenzlemmas) von ξ unabhängig ist.
Auf die gleiche Weise lassen sich auch andere Standardmodellkonstruktionen um Interpretationen für $\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}$ erweitern. Wesentlich ist für diese Konstruktion

lediglich, daß wir die Induktion über den Aufbau des μ-Typs auch auf der Metaebene zur Verfügung haben.
Als nächstes wollen wir die Realisierbarkeit der Induktionsaxiome für P_{vc} in $HA^{\mu} + (ID^{\hat{P}_{\vec{\kappa}}})$ zeigen und die Beziehungen zwischen den Formeln $P_{\vec{\mathcal{K}}}(t)$ und $\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,t)$ untersuchen. Dazu zeigen wir zuerst, daß die starken Induktionsaxiome für $\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0)$, das heißt die Formeln

$$\vec{\mathcal{K}}[\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0) \wedge B, B] \rightarrow \forall x_0.\, \exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0) \rightarrow B$$

mit $B \in \mathcal{L}[\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}]$ beweisbar sind.

Lemma 3.3 *Seien $\vec{\mathcal{K}}$,$\mathcal{K}_i$ und $\mu = \mu\alpha(\vec{\kappa})$ wie zuvor. Dann gilt:*

$$(down_i^{\vec{\mathcal{K}}}) + (mr^+) \vdash \forall \vec{x}, \vec{y}^{\tau(\vec{A})}, \vec{f}^{\tau(\vec{C})[\mu]}, x_1.\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(K_i^{\mu} \vec{x}\vec{y}\vec{f}, x_1) \rightarrow$$
$$IV_{\mu,i,j}^{\forall w\, \forall x_0.\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,x_0) \rightarrow B}(f_j) \rightarrow C_j[\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0) \wedge B]$$

Beweis: Es ist

$$C_j[\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0) \wedge B] = \forall \vec{z}_j.\, \vec{B}_j \rightarrow \exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, s_j) \wedge B[x_0 \mapsto s_j]$$

Seien also $\vec{x}, \vec{y}, \vec{f}, x_1$ und $\vec{z}_j$ gegeben und gelte

$$IV_{\mu,i,j}^{\forall w\, \forall x_0.\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,x_0) \rightarrow B}(f_j) = \forall \vec{v}, x_0.\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(f_j \vec{v}, x_0) \rightarrow B,$$

$$\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(K_i^{\mu} \vec{x}\vec{y}\vec{f}, x_1) \text{ und}$$
$$\vec{B}_j.$$

Zu zeigen ist $\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, s_j) \wedge B[x_0 \mapsto s_j]$: Aus $\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(K_i^{\mu} \vec{x}\vec{y}\vec{f}, x_1)$ folgt mit dem Axiom $down_i^{\vec{\mathcal{K}}}$:

$$f_j\; mr\; C_j[\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0)] = \forall \vec{z}_j, \vec{v'}^{\tau(\vec{B}_j)}.\, (\vec{v'}\; mr\; \vec{B}_j) \rightarrow \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(f_j \vec{z}_j \vec{v'}, s_j)$$

Wir haben $\vec{B}_j$ angenommen, seien also entsprechend den $mr^+_{\vec{B}_j}$-Axiomen $\vec{v'}$ gegeben, so daß $\vec{v'}\; mr\; \vec{B}_j$ gilt. Dann können wir $\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(f_j \vec{z}_j \vec{v'}, s_j)$ folgern, damit ist die linke Seite der Konjunktion gezeigt. Außerdem können wir mit $IV_{\mu,i,j}^{\forall w\, \forall x_0.\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,x_0) \rightarrow B}(f_j)$ auf $B[x_0 \mapsto s_j]$ schliessen, womit auch die rechte Seite der Konjunktion gezeigt ist.

Lemma 3.4 *Mit $\vec{\mathcal{K}}$,$\mathcal{K}_i$,$\mu\alpha(\vec{\kappa})$ und B wie oben gilt:*

$$(down_i^{\vec{\mathcal{K}}}), (mr^+), (mr^-) \vdash \mathcal{K}_i[\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0) \wedge B, B] \rightarrow SF_{\mu,i}^{\forall w\, \forall x_0.\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,x_0) \rightarrow B}$$

Beweis: Es ist

$$\mathcal{K}_i[\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0) \wedge B, B] = \forall \vec{x'}.\, \vec{A} \to$$
$$C_1[\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0) \wedge B] \to \ldots \to C_m[\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0) \wedge B] \to B[x_0 \mapsto t],$$
$$SF_{\mu,i}^{\forall w\, \forall x_0.\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,x_0) \to B} = \forall \vec{x}, \vec{y}^{\tau(\vec{A})}, f_1^{\tau(C_1)[\mu]}, \ldots, f_m^{\tau(C_m)[\mu]}.$$
$$IV_{\mu,i,1}^{\forall w\, \forall x_0.\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,x_0) \to B}(f_1) \to \ldots \to IV_{\mu,i,m}^{\forall w\, \forall x_0.\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,x_0) \to B}(f_m) \to$$
$$\forall x_0.\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(K_i^\mu \vec{x}\vec{y}\vec{f}, x_0) \to B$$

Seien also $\vec{x}, \vec{y}, \vec{f}$ und x_0 gegeben so daß

$$\mathcal{K}_i[\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0) \wedge B, B],$$

$$IV_{\mu,i,j}^{\forall w\, \forall x_0.\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,x_0) \to B}(f_j) \text{ für } j = 1, \ldots, n \text{ und}$$
$$\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(K_i^\mu \vec{x}\vec{y}\vec{f}, x_0)$$

gilt. Aus dem $down_i^{\vec{\mathcal{K}}}$-Axiom folgt $x_0 = t$ und $\vec{y}\, mr\, \vec{A}$. Es ist also $B[x_0 \mapsto t]$ zu zeigen. Dies erhalten wir aus $\mathcal{K}_i[\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0) \wedge B, B]$ mit $\vec{x'} := \vec{x}$, da wir $\vec{A}$ aus $\vec{y}\, mr\, \vec{A}$ mit den $mr^-_{\vec{A}}$-Axiomen und $C_j[\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0) \wedge B]$ nach vorigem Lemma aus $IV_{\mu,i,j}^{\forall w\, \forall x_0.\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,x_0) \to B}(f_j)$ und $\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(K_i^\mu \vec{x}\vec{y}\vec{f}, x_0)$ erhalten.

Satz 3.1

$$(HA^\mu), (down^{\vec{\mathcal{K}}}), (mr^+), (mr^-) \vdash$$
$$\vec{\mathcal{K}}[\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0) \wedge B, B] \to \forall x_0.\, \exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0) \to B$$

Beweis: Gelte $\vec{\mathcal{K}}[\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0) \wedge B, B]$. Wir zeigen erst $\forall w, x_0.\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0) \to B$ durch strukturelle Induktion über w, daraus folgt dann die Behauptung. Zu zeigen ist also $SF_{\mu,i}^{\forall w\, \forall x_0.\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,x_0) \to B}$ für $i = 1, \ldots, n+1$. Für $i = 1, \ldots, n$ folgt dies nach vorigem Lemma aus $\mathcal{K}_i[\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0) \wedge B, B]$. Zu zeigen bleibt $SF_{\mu,n+1}^{\forall w\, \forall x_0.\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,x_0) \to B}$, d.h. $\forall x_0.\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(K_{n+1}^\mu, x_0) \to B$. Dies folgt mittels Ex-falso-quodlibet,da nach dem $down_{n+1}^{\vec{\mathcal{K}}}$-Axiom $\forall x\, \neg \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(K_{n+1}^\mu, x)$ gilt.

Korollar 3.3 *Sind die Klauseln $\vec{\mathcal{K}}$ negative Formeln, so sind die Induktionsaxiome für $\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}$ in $(HA^\mu) + (down^{\vec{\mathcal{K}}}) + (up^{\vec{\mathcal{K}}})$ beweisbar.*

Beweis: Betrachtet man den Beweis von Lemma 3.3 und Lemma 3.4, so sieht man, daß die (mr^+)- und (mr^-) -Axiome für negative Klauseln nicht benötigt werden.

Korollar 3.4 *Zu jedem Beweis $M : HA^\mu + (ID^{P_{\vec{\mathcal{K}}}}), \{\} \Rightarrow A$ gibt es $t^{\tau(A)}$ und einen Beweis $N : HA^\mu + (ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}}), \{\} \Rightarrow t\, mr\, A$.*

Beweis: Wir ersetzen in M jede Formel B durch $B[P_{\vec{\mathcal{K}}}(\cdot) \mapsto \exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,\cdot)]$. Die Korrektheit der Schlußregeln bleibt dabei erhalten, außerdem sind die so übersetzten Axiome aus HA^μ wieder Axiome aus HA^μ. Die Axiome aus $(ID^{P_{\vec{\mathcal{K}}}})$ werden zu Formeln übersetzt, die in $HA^\mu + (ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}}) + (mr^+) + (mr^-)$ beweisbar sind, also erhalten wir einen Beweis $M' : HA^\mu + (ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}}) + (mr^+) + (mr^-), \{\} \Rightarrow A[P_{\vec{\mathcal{K}}}(\cdot) \mapsto \exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,\cdot)]$. Da die Axiome aus $HA^\mu + (ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}}) + (mr^+) + (mr^-)$ in $HA^\mu + (ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}})$ realisierbar sind, erhalten wir nach Satz 2.1 einen Beweis $\mu(M') : HA^\mu + (ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}}), \{\} \Rightarrow et(M')\, mr\, A[P_{\vec{\mathcal{K}}}(\cdot) \mapsto \exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,\cdot)]$ und es gilt $et(M')\, mr\, A[P_{\vec{\mathcal{K}}}(\cdot) \mapsto \exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,\cdot)] = et(M')\, mr\, A$.

Nun vergleichen wir noch die Aussagen $P_{\vec{\mathcal{K}}}(t)$ und $\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,t)$ miteinander.

Korollar 3.5

$$HA^\mu + (ID^{P_{\vec{\mathcal{K}}}}) + (ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}}) + (mr^+) + (mr^-) \vdash \forall x.\, \exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,x) \to P_{\vec{\mathcal{K}}}(x)$$

Sind die Klauseln $\vec{\mathcal{K}}$ negativ, so gilt sogar

$$HA^\mu + (ID^{P_{\vec{\mathcal{K}}}}) + (ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}}) \vdash \forall x.\, \exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,x) \to P_{\vec{\mathcal{K}}}(x)$$

Beweis: Nach Satz 3.1 bzw. Korollar 3.3 genügt es, $\vec{\mathcal{K}}[P_{\vec{\mathcal{K}}}(x_0)]$ zu zeigen. Dies sind jedoch gerade die Abschlußaxiome für $P_{\vec{\mathcal{K}}}$.

Korollar 3.6

$$HA^\mu + (ID^{P_{\vec{\mathcal{K}}}}) \vdash P_{\vec{\mathcal{K}}}(t) \quad \Rightarrow \quad HA^\mu + (ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}}) \vdash \exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,t)$$

Beweis: Nach Korollar 3.4 können wir aus einem Beweis von $P_{\vec{\mathcal{K}}}(t)$ in $HA^\mu + (ID^{P_{\vec{\mathcal{K}}}})$ einen Term s extrahieren, so daß $\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(s,t)$ und damit auch $\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,t)$ in $HA^\mu + (ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}})$ beweisbar ist.

Lemma 3.5

$$HA^\mu + (ID^{P_{\vec{\mathcal{K}}}}) + (ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}}) + (mr^-) \vdash \forall x.\, P_{\vec{\mathcal{K}}}(x) \to \exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,x)$$

Beweis: Wir benutzen das (schwache) Induktionsaxiom für $P_{\vec{\mathcal{K}}}$, müssen also $\vec{\mathcal{K}}[\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w,x_0)]$ zeigen. Dies folgt aus den $up^{\vec{\mathcal{K}}}$-Axiomen mittels (mr^-).

Wir kommen nun zurück zur Frage, warum man die Beweise, aus denen man am Ende Programme extrahieren will, nicht gleich in der Theorie $HA^\mu + (ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}})$ statt $HA^\mu + (ID^{P_{\vec{\mathcal{K}}}})$ führt. Benutzt man die (mr^+)– und (mr^-)–Formeln als zusätzliche Axiome, so stellt dies kein Problem dar, da die Übersetzungen der $(ID^{P_{\vec{\mathcal{K}}}})$-Axiome in $HA^\mu + (ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}}) + (mr^+) + (mr^-)$ beweisbar sind.
Ist man jedoch an Modellen für HA^μ interessiert, in denen die (mr^+)– und (mr^-)–Formeln nicht gelten, zum Beispiel Modelle, in denen nur berechenbare

Abbildung von D_ρ nach D_σ durch ein Objekt in $D_{\rho\to\sigma}$ repräsentiert werden, so gilt dies nicht mehr. Insbesondere die Abschlußaxiome $\vec{\mathcal{K}}[\exists w\, \hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}(w, x_0)]$ gelten in diesen Modellen im allgemeinen nicht, obwohl sie nach den $up^{\vec{\mathcal{K}}}$-Axiomen realisierbar sind. In einer Fallstudie zu Higman's Lemma hat sich gezeigt, daß dadurch die Verwendbarkeit der Programmextraktion stark eingeschränkt wird. Zwar ließ sich der fragliche Beweis auch in der Theorie $HA^\mu + (ID^{\hat{P}_{\vec{\mathcal{K}}}})$ führen, es mußte jedoch an einer Stelle ein längerer Programmterm explizit angegeben werden, der beim entsprechenden Beweis in der Theorie $HA^\mu + (ID^{P_{\vec{\mathcal{K}}}})$ durch Programmextraktion hätte gewonnen werden können.

3.4 Transfinite Induktion

Abschliessend betrachten wir ein Beispiel einer induktiven Definition, den erreichbaren Teil einer zweistelligen Relation und analysieren den Realisierer des Induktionsaxioms, den wir aus Korollar 3.4 erhalten. Sämtliche Beweise wurden in Minlog durchgeführt, wir geben daher nur die Ergebnisse an.
Sei ein Term $\prec$: $\rho \to \rho \to \mathsf{boole}$ gegeben, wir schreiben $x \prec y$ für $\prec xy$. Der erreichbare Teil $Acc_\prec$ wird definiert durch die Klausel

$$\mathcal{K}_\prec : \forall x^\rho. (\forall y^\rho. y \prec x \to X(y)) \to Y(x)$$

Das (schwache) Induktionsaxiom zu einer Formel A lautet dann

$$(\forall x. (\forall y. y \prec x \to A[x_0 \mapsto y]) \to A[x_0 \mapsto x]) \to \forall x_0. \exists w^\mu\, \hat{P}_\prec(w, x_0) \to A$$

mit $\mu = \mu\alpha(\rho \to (\rho \to \alpha) \to \alpha, \alpha)$. Wenn wir also $\forall x\, \exists w\, \hat{P}_\prec(w, x)$ beweisen können, erhalten wir daraus genau das Axiomenschema der transfiniten Induktion nach $\prec$, das die Fundiertheit von $\prec$ ausdrückt. Wir gehen im folgenden davon aus, daß $\prec$ beweisbar fundiert ist, wie sieht dann ein Realisierer $t^{\rho\to\mu}$ von $\forall x\, \exists w\, \hat{P}_\prec(w, x)$ aus ? Sei dazu s ein geschlossener Term vom Typ ρ. Die Normalform von ts ist nach Lemma 1.3 von der Gestalt $K_1^\mu r^\rho t'^{\rho\to\mu}$ oder K_2^μ. Da $\hat{P}_\prec(ts, s)$ gelten soll, ist zweiteres nach dem $down_2^{\mathcal{K}_\prec}$-Axiom unmöglich. Also muß $\mathrm{Nf}(ts) = K_1^\mu rt'$ und nach $down_1^{\mathcal{K}_\prec}$-Axiom $r = s$ und für alle s'^ρ mit $s' \prec s$ $\hat{P}_\prec(t's', s')$ gelten. Gilt umgekehrt $\hat{P}_\prec(t's', s')$ für alle $s' \prec s$, so folgt daraus mit $up_1^{\mathcal{K}_\prec}$ die Gültigkeit von $\hat{P}_\prec(K_1^\mu s^\rho t'^{\rho\to\mu})$.
Damit können wir informell zu jedem Objekt a vom Typ ρ ein Objekt r_a vom Typ μ mit $\hat{P}_\prec(r_a, a)$ durch Rekursion nach $\prec$ konstruieren: $r_a := K_1^\mu a f_a$ mit

$$f_a b := \begin{cases} r_b & \text{falls } b \prec a \\ K_2^\mu & \text{sonst} \end{cases}$$

Das Problem bei einer Formalisierung dieser Konstruktion ist natürlich, daß wir die Rekursion nach $\prec$ nicht zur Verfügung haben, sondern diese durch eine oder mehrere strukturelle Rekursionen über den Aufbau eines oder mehrerer μ-Typen simulieren müßen. Hat man jedoch bereits irgendeinen Realisierer t von

$\forall x\, \exists w\, \hat{P}_{\prec}(w,x)$ gefunden, so kann man daraus auch eine Variante gewinnen, die der obigen Konstruktion entspricht:
Sei $can : \mu \to \mu$ definiert durch

$$can(K_1^\mu t_1^\rho t_2^{\rho\to\mu}) = K_1^\mu t_1(\lambda x^\rho[\mathbf{if}\, x \prec t_1\, \mathbf{then}\, can(t_2 x)\, \mathbf{else}\, K_2^\mu]),$$

$$can K_2^\mu = K_2^\mu,$$

das heißt $can = R_\mu^\mu(\lambda x^\rho, f_1^{\rho\to\mu}, f_2^{\rho\to\mu}.K_1^\mu x(\lambda y[\mathbf{if}\, y \prec x\, \mathbf{then}\, f_2 y\, \mathbf{else}\, K_2^\mu]))K_2^\mu$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & HA^\mu + (ID^{\hat{P}_\prec}) \vdash \forall w, x.\, \hat{P}_\prec(w,x) \leftrightarrow \hat{P}_\prec(can\, w, x) \quad \text{und} \\ & HA^\mu + (down^{\mathcal{K}_\prec}) + (Ext^{\rho\to\mu}) \vdash \forall w_1, w_2, x. \\ & \quad \hat{P}_\prec(w_1,x) \to \hat{P}_\prec(w_2,x) \to can\, w_1 = can\, w_2 \end{aligned}$$

mit $Ext^{\rho\to\mu} := \forall f_1^{\rho\to\mu}, f_2^{\rho\to\mu}.\forall x\, f_1 x = f_2 x \to f_1 = f_2$. can bringt also jeden Realisierer von $\exists w\, \hat{P}_\prec(w,t)$ in eine extensional eindeutige Form. Diese entspricht genau der oben angegebenen informellen Konstruktion, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} & HA^\mu + (down^{\mathcal{K}_\prec}) + (Ext^{\rho\to\mu}) \vdash \forall f^{\rho\to\mu}.\, f\, mr\, (\forall x\, \exists w\, \hat{P}_\prec(w,x)) \to \\ & \quad \forall x^\rho\, can(fx) = K_1^\mu x(\lambda y[\mathbf{if}\, y \prec x\, \mathbf{then}\, can(fy)\, \mathbf{else}\, K_2^\mu] \end{aligned}$$

Sei nun $\bot_\sigma$ ein fest gewählter geschlossener Term vom Typ σ und A eine Harropformel. Im Beweis des Induktionsaxioms

$$\begin{aligned} & (\forall x.\, (\forall y.\, y \prec x \to \exists z^\sigma\, A[x_0 \mapsto y]) \to \exists z\, A[x_0 \mapsto x]) \to \\ & \quad \forall x_0.\, \exists w\, \hat{P}_\prec(w, x_0) \to \exists z\, A \end{aligned}$$

wird das Lemma $\bot \to \exists z\, A$ verwendet, dieses läßt sich so beweisen, daß man als extrahierten Term $\bot_\sigma$ erhält. Sei weiterhin $real : \rho \to \mu$ ein kanonischer Realisierer von $\forall x\, \exists w\, \hat{P}_\prec(w,x)$, das heißt es gilt $\forall x.\, real\, x = K_1^\mu x(\lambda y[\mathbf{if}\, y \prec x\, \mathbf{then}\, real\, y\, \mathbf{else}\, K_2^\mu]$ und $q : (\rho \to (\rho \to \sigma) \to \sigma) \to \rho \to \sigma$ der extrahierte Term des damit erhaltenen Axioms der transfiniten Induktion

$$(\forall x.\, (\forall y.\, y \prec x \to \exists z\, A[x_0 \mapsto y]) \to \exists z\, A[x_0 \mapsto x]) \to \forall x_0\, \exists z\, A.$$

Dann verhält sich $q' := \lambda f^{(\rho\to\sigma)\to(\rho\to\sigma)}.q(\lambda y^\rho, g^{\rho\to\sigma} fgy)$ wie der beschränkte Rekursionsoperator $Y_{\rho\to\sigma,\prec}$ (vgl. [7]), d.h. es gilt

$$\begin{aligned} & HA^\mu + (down^{\mathcal{K}_\prec}) \vdash \forall f^{(\rho\to\sigma)\to(\rho\to\sigma)}, x^\rho. \\ & \quad q' f x = f(\lambda y[\mathbf{if}\, y \prec x\, \mathbf{then}\, q' f y\, \mathbf{else}\, \bot_\sigma])x. \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[1] Holger Benl, Ulrich Berger, Helmut Schwichtenberg, Monika Seisenberger, and Wolfgang Zuber. Proof theory at work: Program development in the Minlog system. To appear: Automated Deduction – A Basis for Applications (eds W. Bibel and P. Schmitt), Volume I: Foundations, Kluwer Academic Publishers, 1998.

[2] Ulrich Berger. A constructive interpretation of positive inductive definitions. Draft, March 1995.

[3] Ulrich Berger, Helmut Schwichtenberg, and Monika Seisenberger. From proofs to programs in the Minlog system. The Warshall algorithm and Higman's lemma. Submitted to J. Automated Reasoning (F. Pfenning, ed.), 1997.

[4] Wilfried Buchholz, Solomon Feferman, Wolfram Pohlers, and Wilfried Sieg. *Iterated Inductive Definitions and Subsystems of Analysis: Recent Proof–Theoretical Studies*, volume 897 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Berlin, 1981.

[5] Anne S. Troelstra (editor). *Metamathematical Investigation of Intuitionistic Arithmetic and Analysis*, volume 344 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[6] Georg Kreisel. Interpretation of analysis by means of constructive functionals of finite types. In A. Heyting, editor, *Constructivity in Mathematics*, pages 101–128. North–Holland, Amsterdam, 1959.

[7] Helmut Schwichtenberg and Stanley S. Wainer. Ordinal bounds for programs. In P. Clote and J. Remmel, editors, *Feasible Mathematics II*, pages 387–406. Birkhäuser, Boston, 1995.

[8] Anne S. Troelstra and Dirk van Dalen. *Constructivism in Mathematics. An Introduction*, volume 121, 123 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North–Holland, Amsterdam, 1988.

Hiermit erkläre ich, daß ich diese Diplomarbeit selbständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

München, den 2. Juni 1998