Praktikum Beweiser, SS 2003, Informatik, TU München

Klausur vom 10.07.2003

A

Matr.-Nr.:

1. **Tragen Sie bitte in das Aufgabenblatt Ihre Matrikel-Nummer ein.**
2. **Schreiben Sie bitte auf jedes Arbeitsblatt ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.**
3. **Legen Sie bitte bei Abgabe der Klausur alle Arbeitsblätter in das zusammengeklappte Aufgabenblatt.**

Aufgabe 1: Semantische Bäume, Essentialität (10 Punkte)

(a) (4 Punkte): Zeigen Sie mit Hilfe eines semantischen Baumes, dass die aus den folgenden Klauseln bestehende Menge S unerfüllbar ist:

(1) $\{r \vee s\}$, (2) $\{p \vee \neg r \vee s\}$, (3) $\{\neg p \vee \neg r \vee s\}$,

(4) $\{p \vee \neg r\}$, (5) $\{\neg p \vee \neg r \vee \neg s\}$, (6) $\{r \vee \neg s\}$.

(b) (6 Punkte): Geben Sie eine essentielle Klausel c in S an und beweisen Sie, dass c essentiell in S ist.

Nützliche Definitionen zur Lösung der Aufgabe:

Semantischer Baum für eine Klauselmenge S:

Binärbaum, dessen Kanten mit Literalen und dessen Blattknoten möglicherweise mit Klauseln aus S markiert sind wie folgt:

- Jedes Paar von Kanten, die aus einem gemeinsamen Knoten entspringen, ist mit einer Variablen p, die in S vorkommt, bzw. mit $\neg p$ markiert, wobei weder p noch $\neg p$ bereits auf dem Ast vorkommen.
- jeder Blattknoten kann mit einer Klausel $c \in S$ markiert sein, falls die *Komplemente* aller Literale in c auf dem Ast vorkommen.

Ein semantischer Baum für S ist *geschlossen* gdw jeder Blattknoten mit einer Klausel markiert ist.

Eine Klausel c ist *essentiell* in einer Klauselmenge S gdw S unerfüllbar und $S \setminus \{c\}$ erfüllbar sind.

Aufgabe 2: Aussagenlogische Resolution (10 Punkte)

(a) (4 Punkte): Geben Sie eine Resolutionswiderlegung der Klauselmenge S an, die aus den folgenden 6 Klauseln besteht (Klauseln sind hier als Mengen von Literalen dargestellt):

(1) $\{p, q\}$, (2) $\{\neg p, s\}$, (3) $\{p, \neg q, s\}$,

(4) $\{p, \neg r, \neg s\}$, (5) $\{\neg p, \neg r, \neg s\}$, (6) $\{r, \neg s\}$.

(b) (6 Punkte): Sei $\prec$ eine lineare Ordnung aller aussagenlogischen Variablen, die in einer Klauselmenge S vorkommen. Ein Literal l in einer Klausel $k \in S$ heisst *maximal bzgl.* $\prec$ gdw es kein Literal $l' \in k$ gibt derart, dass die Variable von $l \prec$ als die Variable von l' ist. Bei der *geordneten Resolution bzgl.* $\prec$ darf aus beiden Elternklauseln jeweils nur ein maximales Literal bzgl. $\prec$ herausresolviert werden, andere Resolutionsschritte sind nicht erlaubt.

Konstruieren Sie eine geordnete Resolutionswiderlegung von S (aus Teilaufgabe (a)) bzgl. der Ordnung $p \prec q \prec r \prec s$, Nach dieser Ordnung darf z.B. in der Klausel 5 nur das Literal $\neg s$ als Resolventenliteral gewählt werden.

Aufgabe 3: Prädikatenlogische Modelle (10 Punkte)

(a) (5 Punkte): Gegeben sei die Formelmenge $S =$

$$\{ \ \forall x D(x), \ \forall x(D(x) \rightarrow (E(x,x) \land \neg E(x, f(x)))) \ \}.$$

Geben Sie ein Modell $\langle \mathcal{U}, \iota \rangle$ für S an, wobei $\mathcal{U} = \{0, 1\}$.

(b) (5 Punkte): Zeigen Sie, dass es kein Modell für S mit einem Universum kleinerer Mächtigkeit gibt, d.h. z.B. nicht für $\mathcal{U} = \{0\}$.

Nützliche Definitionen zur Lösung der Aufgabe:

Interpretation $\mathcal{I} = \langle \mathcal{U}, \iota \rangle$:

- $\mathcal{U}$ *Universum*: Nichtleere Menge von Objekten
- ι *Interpretationsfunktion*:
  - jedem n-stelliges Funktionssymbol f wird eine Funktion $\iota(f) : \mathcal{U}^n \longrightarrow \mathcal{U}$ zugeordnet
  - jedem n-stelliges Prädikatsymbol P wird eine n-stellige Relation $\iota(P) \subseteq \mathcal{U}^n$ zugeordnet

Variablenzuweisung: Funktion $\mathcal{A} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$

Termzuweisung: Fortsetzung einer Interpretation $\langle \mathcal{U}, \iota \rangle$ und einer Variablenzuweisung $\mathcal{A}$ auf *Terme*

- $\iota^{\mathcal{A}}(x) = \mathcal{A}(x)$ (x Variable)
- $\iota^{\mathcal{A}}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \iota(f)(\iota^{\mathcal{A}}(t_1), \ldots, \iota^{\mathcal{A}}(t_n))$ ($n \in \mathbb{N}_0$ und f n-stelliges Funktionszeichen)

Formelzuweisung: Fortsetzung einer Interpretation $\langle \mathcal{U}, \iota \rangle$ und einer Variablenzuweisung $\mathcal{A}$ auf *Formeln*

- $\iota^{\mathcal{A}}(P(t_1, \ldots, t_n)) = \mathbf{w}$, falls $\langle \iota^{\mathcal{A}}(t_1), \ldots, \iota^{\mathcal{A}}(t_n) \rangle \in \iota(P)$ und $\mathbf{f}$ sonst (wobei P n-stellig)
- $\iota^{\mathcal{A}}(\neg F) = \mathbf{w}$, falls $\iota^{\mathcal{A}}(F) = \mathbf{f}$ und $\mathbf{f}$ sonst
- $\iota^{\mathcal{A}}(F \land G) = \mathbf{w}$, falls $\iota^{\mathcal{A}}(F) = \mathbf{w}$ und $\iota^{\mathcal{A}}(G) = \mathbf{w}$, und $\mathbf{f}$ sonst
- $\iota^{\mathcal{A}}(F \lor G) = \iota^{\mathcal{A}}(\neg(\neg F \land \neg G))$
- $\iota^{\mathcal{A}}(F \rightarrow G) = \iota^{\mathcal{A}}(\neg F \lor G)$
- $\iota^{\mathcal{A}}(\forall x F) = \mathbf{w}$, falls $\iota^{\mathcal{A}^u_x}(F) = \mathbf{w}$ für alle $u \in \mathcal{U}$, und $\mathbf{f}$ sonst
  (wobei $\mathcal{A}^u_x(x) = u$ und für alle $y \neq x : \mathcal{A}^u_x(y) = \mathcal{A}(y)$)

Aufgabe 4: Prädikatenlogische Normalformtransformationen (10 Punkte)

(a) (5 Punkte): Transformieren Sie die Formel $F = \forall x\ (A(x) \wedge (\neg\exists x D(x) \vee (E(x,x) \wedge N(x, f(x)))))$ in eine logisch äquivalente Formel in Pränexform, d.h. in eine Formel vom Typ $Q_1 x_1 \cdots Q_n x_n G$, wobei die $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ und G quantorenfrei ist.

(b) (5 Punkte): Transformieren Sie die Formel $H = \forall x\ (A(x) \wedge (\forall y D(y) \rightarrow (E(x,x) \wedge N(x, f(x)))))$ erfüllbarkeits- bzw. unerfüllbarkeitserhaltend in eine Formel in Skolemform, d.h. in eine Formel vom Typ $\forall x_1 \cdots \forall x_n I$, wobei I quantorenfrei ist.

Nützliche Eigenschaften zur Lösung der Aufgabe:

Es gelten unter anderem folgende Sätze:

- $QxF \equiv QyF\{x/y\}$, wobei $Q \in \{\forall, \exists\}$ und $F\{x/y\}$ das Resultat der Ersetzung aller freien Vorkommnisse von x in F durch y ist.
- $(QxF \circ G) \equiv Qx(F \circ G)$ und $(F \circ QxG) \equiv Qx(F \circ G)$, falls x in G nicht frei vorkommt, wobei $\circ \in \{\wedge, \vee\}$ und $Q \in \{\forall, \exists\}$.
- $\neg\exists xF \equiv \forall x \neg F$ und $\neg\forall xF \equiv \exists x \neg F$.
- $\forall x_1 \cdots \forall x_n \exists y F$ ist erfüllbar gdw $\forall x_1 \cdots \forall x_n F\{y/f(x_1, \ldots, x_n)\}$ erfüllbar ist, wobei f neu in der Formel ist.

Aufgabe 5: Prädikatenlogische Konnektionstableaux (10 Punkte)

Konstruieren Sie ein geschlossenes Konnektionstableau für die Klauselmenge S, die aus den folgenden 6 Klauseln besteht (dabei seien x, y Variablen und a, b Konstanten):

(1) $\neg P(f(x), y) \vee \neg P(x, y)$	(2) $P(f(a), f(a))$	(3) $\neg R(x, x)$
(4) $P(x, y) \vee R(f(x), y)$	(5) $\neg Q(b, a)$	(6) $Q(x, f(x))$

Nützliche Definitionen zur Lösung der Aufgabe:

Ein *Unifikator* zweier Literale L_1, L_2 ist eine Substitution σ der Variablen durch Terme derart, daß $L_1\sigma = L_2\sigma$. Ein Unifikator heisst *minimal*, wenn die Menge der durch andere Terme ersetzten Variablen minimal ist.

Inferenzregeln des *prädikatenlogischen Konnektionstabeaukalküls* (sei S die Eingabeklauselmenge):

1. Startregel: Hänge die Literale einer Klausel aus S an die Wurzel des Baumes
2. Extensionsregel: Gegeben ein offener Knoten N mit Literal L. Wähle eine variablendisjunkte Variante c einer Klauselformel aus S aus, die ein Literal K enthält derart, daß $\{\sim K, L\}$ unifizierbar ist mit minimalem Unifikator σ. Hänge die Klausel an den Knoten N an, wende die Substitution σ auf das Tableau an und markiere einen der um $K\sigma$ verlängerten Ast als geschlossen.
3. Reduktionsregel: Gegeben ein offener Knoten N mit Literal L. Wähle einen Vorgängerknoten N' von N mit Literal K derart, daß $\{\sim K, L\}$ unifizierbar ist mit minimalem Unifikator σ. Wende die Substitution σ auf das Tableau an und markiere N als geschlossen.
