Praktikum Beweiser, WS 2004/2005, Informatik, TU München

A

Musterlösungen der Klausur vom 9.02.2005

Aufgabe 1: Aussagenlogik allgemein (11 Punkte)

Wir betrachten die Klauselmenge S, die aus den folgenden Klauseln besteht:

1. $p \vee \neg q \vee r$
2. $\neg q \vee r \vee s$
3. $p \vee r \vee \neg s$
4. $p \vee r \vee s$
5. $r \vee \neg s$
6. $\neg p \vee r$
7. $p \vee \neg r$

(a) (6 Punkte): Geben Sie alle Modelle für S an.

Lösung:

Modell 1: $\{p/w, r/w, q/w, s/w\}$
Modell 2: $\{p/w, r/w, q/w, s/f\}$
Modell 3: $\{p/w, r/w, q/f, s/w\}$
Modell 4: $\{p/w, r/w, q/f, s/f\}$

(b) (5 Punkte): Geben Sie eine Klausel c_8 an, so daß $S \cup \{c_8\}$ unerfüllbar ist, und zeigen Sie, dass $S \cup \{c_8\}$ unerfüllbar ist.

Lösung:

Klausel $c_8 = \neg p$ (oder $\neg r$ oder $\neg p \vee \neg r$)

Widerlegung durch Resolution:

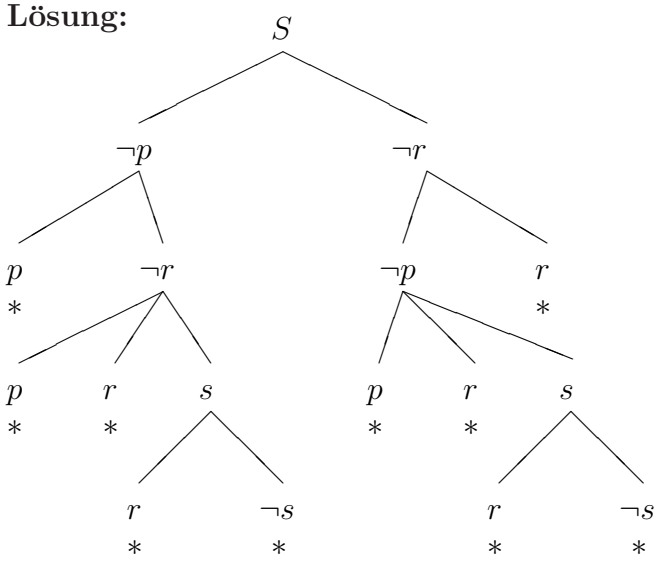
$$\frac{c_8 \qquad c_7}{\neg r \quad [c_9]} \qquad \frac{c_9 \qquad c_5}{\neg s \quad [c_{10}]} \qquad \frac{c_{10} \qquad c_4}{p \vee r \quad [c_{11}]} \qquad \frac{c_{11} \qquad c_8}{r \quad [c_{12}]} \qquad \frac{c_{12} \qquad c_9}{\emptyset}$$

Aufgabe 2: Konnektionstableaux für die Aussagenlogik (11 Punkte)

(a) (7 Punkte): Geben Sie ein geschlossenes reguläres Konnektionstableau für die Klauselmenge S an, die aus den folgenden Klauseln besteht:

1. $p \vee \neg q \vee r$
2. $\neg q \vee r \vee s$
3. $\neg p \vee \neg r$
4. $p \vee r \vee s$
5. $r \vee \neg s$
6. $\neg p \vee r$
7. $p \vee \neg r$

Lösung:



(b) (4 Punkte): Geben Sie eine Klausel $c' \in S$ an, so daß $S \setminus \{c'\}$ weiterhin unerfüllbar ist, und begründen Sie dies.

Lösung:

Z.B. c_1 (oder c_2 oder c_3). Da die Klausel nicht im geschlossenen Tableau vorkommt, muß auch $S \setminus \{c_1\}$ unerfüllbar sein.

Zur Erinnerung: Reguläres Konnektionstableau*: Auf keinem Ast kommt ein Literal mehr als einmal vor.*

Aufgabe 3: Prädikatenlogische Modelle (14 Punkte)

Gegeben sei die Formelmenge S bestehend aus den folgenden 4 Formeln, wobei a und b Konstanten seien (schauen Sie bei der ersten Formel bitte genau hin!):

1. $\forall x \forall y \forall z \left((P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow P(x,y) \right)$
2. $\exists x \, P(x,a)$
3. $\forall x \, P(b,x)$
4. $\exists x \exists y \, \neg P(x,y)$

Geben Sie ein Modell $\mathcal{I} = \langle \mathcal{U}, \iota \rangle$ für S an, dessen Universum $\mathcal{U}$ endlich ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}$ ein Modell für S ist.

Lösung:

$\mathcal{U} = \{a, b\}$
$\iota(a) = a$
$\iota(b) = b$
$\iota(P) = \{\langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$

Beweis:

1. $\iota(1) = w$ gdw für alle Variablenbelegungen $\mathcal{A}$, für die $P(x,z) \wedge P(y,z)$ wahr wird, auch $P(x,y)$ wahr wird. Damit $\iota^{\mathcal{A}}(P(x,z) \wedge P(y,z)) = w$, muss nach Wahl von $\iota(P)$: $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y) = b$. Für diese Variablenbelegungen ist aber $\iota^{\mathcal{A}}(P(x,y)) = w$, da $\langle b, b \rangle \in \iota(P)$.
2. $\iota(2) = w$ gdw es eine Variablenbelegung $\mathcal{A}$ gibt, für die $\iota^{\mathcal{A}}(P(x,a)) = w$. Das gilt für $\mathcal{A}(x) = b$.
3. $\iota(3) = w$ gdw für alle Variablenbelegungen $P(b,x)$ wahr wird. Nach Wahl von $\mathcal{U}$ gibt es nur zwei Belegungen: Falls $\mathcal{A}(x) = a$, ist $\iota^{\mathcal{A}}(P(b,x)) = w$, da $\langle b, a \rangle \in \iota(P)$. Falls $\mathcal{A}(x) = b$, ist $\iota^{\mathcal{A}}(P(b,x)) = w$, da $\langle b, b \rangle \in \iota(P)$.
4. $\iota(4) = w$ gdw es eine Variablenbelegung gibt, für die $P(x,y)$ falsch wird. Das gilt z.B. für $\mathcal{A}(x) = a$ und $\mathcal{A}(y) = b$.

Aufgabe 4: Prädikatenlogische Verfahren (14 Punkte)

Bleibt die Formelmenge aus Aufgabe 3 erfüllbar, wenn wir zusätzlich annehmen, daß P symmetrisch ist? Beweisen Sie Ihre Behauptung formal.

Lösung:

Annahme der Symmetrie heisst Hinzunahme der Formel $\forall x \forall y((P(x,y) \rightarrow P(y,x))$.

Nach Skolemisierung und Klauseltransformation ergeben sich die folgenden Klauseln, wobei c, d, e neue Skolemkonstanten sind:

c_1: $\neg P(x,z) \vee \neg P(y,z)) \vee P(x,y)$

c_2: $P(c,a)$

c_3: $P(b,x)$

c_4: $\neg P(d,e)$

c_5: $\neg P(x,y) \vee P(y,x)$

Widerlegung durch Resolution:

$$\frac{c_3 \qquad c_5}{P(y',b)\ [c_6]} \qquad \frac{c_4 \qquad c_1.3}{\neg P(d,z') \vee \neg P(e,z')\ [c_7]} \qquad \frac{c_7.1 \qquad c_6}{\neg P(e,b)\ [c_8]} \qquad \frac{c_8 \qquad c_6}{\emptyset}$$