Praktikum Beweiser, WS 2004/2005, Informatik, TU München

Musterlösungen der Klausur vom 9.02.2005

B

Aufgabe 1: Aussagenlogik allgemein (11 Punkte)

Wir betrachten die Klauselmenge S, die aus den folgenden Klauseln besteht:

1. $a \vee \neg b \vee c$
2. $\neg b \vee c \vee d$
3. $a \vee c \vee \neg d$
4. $a \vee c \vee d$
5. $c \vee \neg d$
6. $\neg a \vee c$
7. $a \vee \neg c$

(a) (6 Punkte): Geben Sie alle Modelle für S an.

Lösung:

Modell 1: $\{a/w, c/w, b/w, d/w\}$
Modell 2: $\{a/w, c/w, b/w, d/f\}$
Modell 3: $\{a/w, c/w, b/f, d/w\}$
Modell 4: $\{a/w, c/w, b/f, d/f\}$

(b) (5 Punkte): Geben Sie eine Klausel c_8 an, so daß $S \cup \{c_8\}$ unerfüllbar ist, und zeigen Sie, dass $S \cup \{c_8\}$ unerfüllbar ist.

Lösung:

Klausel $c_8 = \neg a$ (oder $\neg c$ oder $\neg a \vee \neg c$)

Widerlegung durch Resolution:

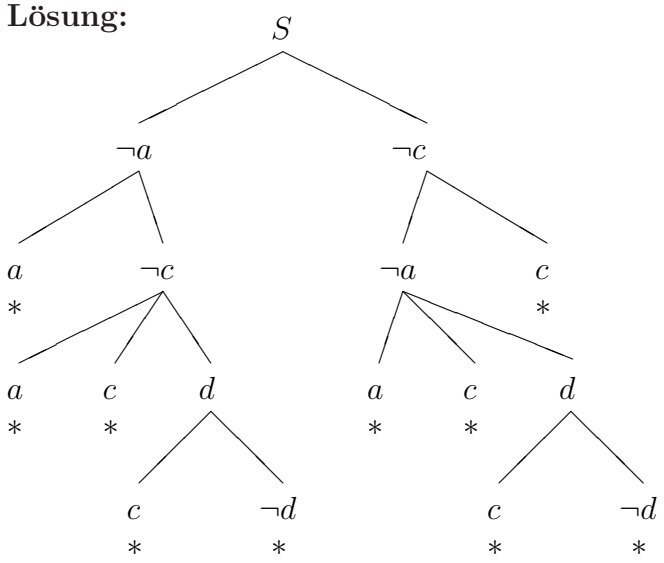
$$\frac{c_8 \qquad c_7}{\neg c \quad [c_9]} \qquad \frac{c_9 \qquad c_5}{\neg d \quad [c_{10}]} \qquad \frac{c_{10} \qquad c_4}{a \vee c \quad [c_{11}]} \qquad \frac{c_{11} \qquad c_8}{c \quad [c_{12}]} \qquad \frac{c_{12} \qquad c_9}{\emptyset}$$

Aufgabe 2: Konnektionstableaux für die Aussagenlogik (11 Punkte)

(a) (7 Punkte): Geben Sie ein geschlossenes reguläres Konnektionstableau für die Klauselmenge S an, die aus den folgenden Klauseln besteht:

1. $a \vee \neg b \vee c$
2. $\neg b \vee c \vee d$
3. $\neg a \vee \neg c$
4. $a \vee c \vee d$
5. $c \vee \neg d$
6. $\neg a \vee c$
7. $a \vee \neg c$

Lösung:



(b) (4 Punkte): Geben Sie eine Klausel $c' \in S$ an, so daß $S \setminus \{c'\}$ weiterhin unerfüllbar ist, und begründen Sie dies.

Lösung:

Z.B. c_1 (oder c_2 oder c_3). Da die Klausel nicht im geschlossenen Tableau vorkommt, muß auch $S \setminus \{c_1\}$ unerfüllbar sein.

Zur Erinnerung: Reguläres Konnektionstableau*: Auf keinem Ast kommt ein Literal mehr als einmal vor.*

Aufgabe 3: Prädikatenlogische Modelle (14 Punkte)

Gegeben sei die Formelmenge S bestehend aus den folgenden 4 Formeln, wobei a und b Konstanten seien (schauen Sie bei der ersten Formel bitte genau hin!):

1. $\forall x \forall y \forall z \left((P(x,z) \wedge P(y,z)) \rightarrow P(x,y) \right)$
2. $\exists x \, P(x,b)$
3. $\forall x \, P(c,x)$
4. $\exists x \exists y \, \neg P(x,y)$

Geben Sie ein Modell $\mathcal{I} = \langle \mathcal{U}, \iota \rangle$ für S an, dessen Universum $\mathcal{U}$ endlich ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}$ ein Modell für S ist.

Lösung:

$\mathcal{U} = \{b, c\}$
$\iota(b) = b$
$\iota(c) = c$
$\iota(P) = \{\langle c, b \rangle, \langle c, c \rangle\}$

Beweis:

1. $\iota(1) = w$ gdw für alle Variablenbelegungen $\mathcal{A}$, für die $P(x,z) \wedge P(y,z)$ wahr wird, auch $P(x,y)$ wahr wird. Damit $\iota^{\mathcal{A}}(P(x,z) \wedge P(y,z)) = w$, muss nach Wahl von $\iota(P)$: $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(y) = c$. Für diese Variablenbelegungen ist aber $\iota^{\mathcal{A}}(P(x,y)) = w$, da $\langle c, c \rangle \in \iota(P)$.
2. $\iota(2) = w$ gdw es eine Variablenbelegung $\mathcal{A}$ gibt, für die $\iota^{\mathcal{A}}(P(x,b)) = w$. Das gilt für $\mathcal{A}(x) = c$.
3. $\iota(3) = w$ gdw für alle Variablenbelegungen $P(c,x)$ wahr wird. Nach Wahl von $\mathcal{U}$ gibt es nur zwei Belegungen: Falls $\mathcal{A}(x) = b$, ist $\iota^{\mathcal{A}}(P(c,x)) = w$, da $\langle c, b \rangle \in \iota(P)$. Falls $\mathcal{A}(x) = c$, ist $\iota^{\mathcal{A}}(P(c,x)) = w$, da $\langle c, c \rangle \in \iota(P)$.
4. $\iota(4) = w$ gdw es eine Variablenbelegung gibt, für die $P(x,y)$ falsch wird. Das gilt z.B. für $\mathcal{A}(x) = b$ und $\mathcal{A}(y) = c$.

Aufgabe 4: Prädikatenlogische Verfahren (14 Punkte)

Bleibt die Formelmenge aus Aufgabe 3 erfüllbar, wenn wir zusätzlich annehmen, daß P symmetrisch ist? Beweisen Sie Ihre Behauptung formal.

Lösung:

Annahme der Symmetrie heisst Hinzunahme der Formel $\forall x \forall y((P(x,y) \rightarrow P(y,x))$.

Nach Skolemisierung und Klauseltransformation ergeben sich die folgenden Klauseln, wobei a, d, e neue Skolemkonstanten sind:

c_1: $\neg P(x,z) \vee \neg P(y,z)) \vee P(x,y)$

c_2: $P(a,b)$

c_3: $P(c,x)$

c_4: $\neg P(d,e)$

c_5: $\neg P(x,y) \vee P(y,x)$

Widerlegung durch Resolution:

$$\frac{c_3 \qquad c_5}{P(y',c)\ [c_6]} \qquad \frac{c_4 \qquad c_1.3}{\neg P(d,z') \vee \neg P(e,z')\ [c_7]} \qquad \frac{c_7.1 \qquad c_6}{\neg P(e,c)\ [c_8]} \qquad \frac{c_8 \qquad c_6}{\emptyset}$$