A

Praktikum Beweiser, SS 2004, Informatik, TU München

Musterlösung der Klausur vom 22.07.2004

Aufgabe 1: Aussagenlogische Modelle (12 Punkte)

Wir betrachten die Klauselmenge S, die aus den folgenden Klauseln besteht:

1. $p \lor q \lor r$
2. $\neg q \lor r \lor s$
3. $p \lor r \lor \neg s$
4. $p \lor r \lor s$
5. $r \lor \neg s$
6. $\neg p \lor r$
7. $\neg p \lor \neg r$

(a) (6 Punkte): Geben Sie alle Modelle für S an.

Lösung

Modelle für S:

$\iota_1 = \{p/falsch, r/wahr, q/wahr, s/wahr\}$
$\iota_2 = \{p/falsch, r/wahr, q/wahr, s/falsch\}$
$\iota_3 = \{p/falsch, r/wahr, q/falsch, s/wahr\}$
$\iota_4 = \{p/falsch, r/wahr, q/falsch, s/falsch\}$

(b) (6 Punkte): Geben Sie eine Klausel c aus S an derart, dass gilt: $S \setminus \{c\} \models S$. Begründen Sie dies.

Lösung

z.B.: $c = (3)$

Begründung: (3) wird von (5) subsumiert, und damit gilt $(5) \models (3)$.

Weitere Klauseln, deren Löschung die Äquivalenz erhält:

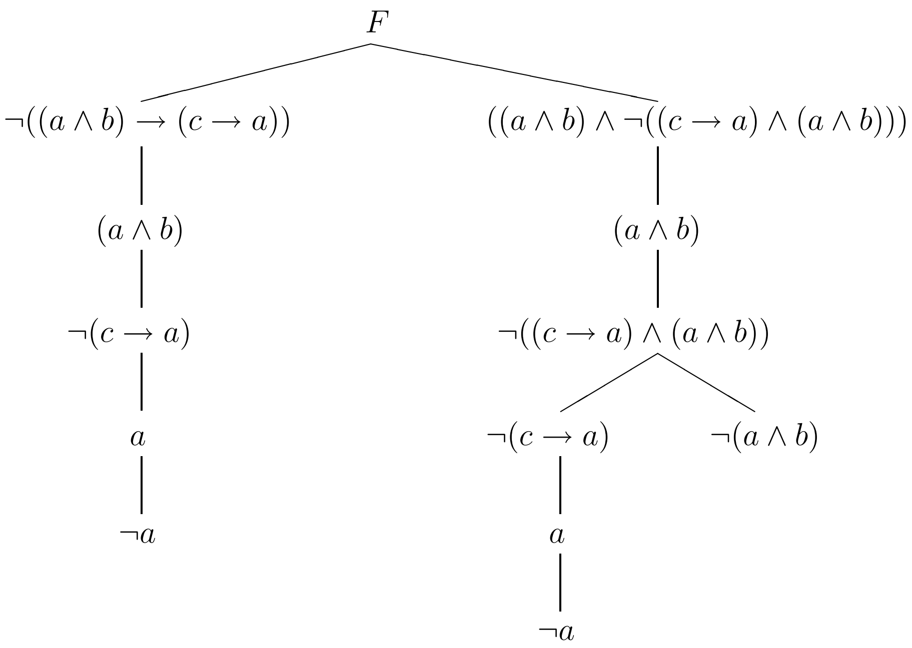
(1): wird impliziert von $\{(4), (5)\}$,
(2): wird impliziert von $\{(4), (6)\}$,
(4): wird impliziert von $\{(1), (2)\}$,
(5): wird impliziert von $\{(3), (6)\}$

Aufgabe 2: Tableaus für die Aussagenlogik (10 Punkte)

Bestimmen Sie mittels des aussagenlogischen Tableauverfahrens, ob die folgende Formel F erfüllbar ist:
$(((a \wedge b) \rightarrow (c \rightarrow a)) \rightarrow ((a \wedge b) \wedge \neg((c \rightarrow a) \wedge (a \wedge b))))$

Lösung

Wir konstruieren ein geschlossenes Tableau für F, damit ist F unerfüllbar.



Bemerkung: Aus der Tatsache, dass es kein geschlossenes Tableau für $\neg F$ gibt und damit $\neg F$ erfüllbar ist, folgt nicht, dass F unerfüllbar ist. (Man betrachte die Formel p; sowohl p als auch $\neg p$ sind erfüllbar).

Aufgabe 3: Prädikatenlogische Modelle (14 Punkte)

Gegeben sei die Klauselmenge S bestehend aus den folgenden 4 Formeln, wobei a eine Konstante sei:

1. $\forall x \forall y \forall z\, (P(x, y, z) \rightarrow P(y, x, z))$
2. $\forall x\, P(x, a, x)$
3. $\forall x \exists y\, P(x, y, a)$
4. $\exists x \exists y\, \neg P(x, y, a)$

Geben Sie ein Modell $\mathcal{I} = \langle \mathcal{U}, \iota \rangle$ für S an, dessen Universum $\mathcal{U}$ endlich ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{I}$ ein Modell für S ist.

Lösung:

Ein mögliches Modell $\mathcal{I} = \langle \mathcal{U}, \iota \rangle$ für S:
$\mathcal{U} = \{0, 1\}$,
$\iota(a) = 0$ (neutrales Element),
$\langle u, v, w \rangle \in \iota(P)$ gdw $u+v = w$, wobei $+$ Addition modulo 2 sei.

Zum Beweis der Modelleigenschaft ist zu zeigen, dass $\mathcal{I}$ jede Formel in S erfüllt:

1. Die Operation $+$ ist kommutativ.
2. $\iota(a) = 0$ ist (rechts)neutrales Element.
3. Es gibt zu jedem Objekt ein inverses.
4. Da z.B. $0 + 1 \neq 0$, gibt es eine Variablenbelegung $\mathcal{A} = \{x/0, y/1\}$ derart, dass $\iota^{\mathcal{A}}(P(x, y, a)) = falsch$, damit ist $\iota(\exists x \exists y \neg P(x, y, a)) = wahr$.

Aufgabe 4: Prädikatenlogische Kalküle (14 Punkte)

Gegeben sei die Klauselmenge S bestehend aus den folgenden 5 Klauseln: wobei x, y, z Variablen und a, b Konstanten seien:

(1) $\neg P(x, y) \vee \neg P(y, z) \vee P(x, z)$

(2) $\neg P(x, y) \vee P(y, x)$

(3) $P(x, y) \vee \neg Q(y, x)$

(4) $Q(a, b)$

(5) $\neg P(a, a)$

Beweisen Sie mit einem Kalkül Ihrer Wahl, dass S unerfüllbar ist.

Lösung:

Beweis mittels prädikatenlogischer Resolution:

$$\frac{(3.2) \qquad (4)}{P(b, a) \quad (6)} \qquad \frac{(2.1) \qquad (6)}{P(a, b) \quad (7)} \qquad \frac{(1.3) \qquad\qquad (5)}{\neg P(a, y') \vee \neg P(y', a) \quad (8)} \qquad \frac{(8.1) \qquad (7)}{\neg P(b, a) \quad (9)} \qquad \frac{(9) \quad (6)}{\emptyset}$$