Praktikum Beweiser, WS 2003/2004, Informatik, TU München

Musterlösung der Klausur vom 12.02.2004

A

Aufgabe 1: Tableaus für die Aussagenlogik (10 Punkte)

(a) (6 Punkte): Zeigen Sie mit Hilfe des Konnektionstableau-Verfahrens, dass die Formel

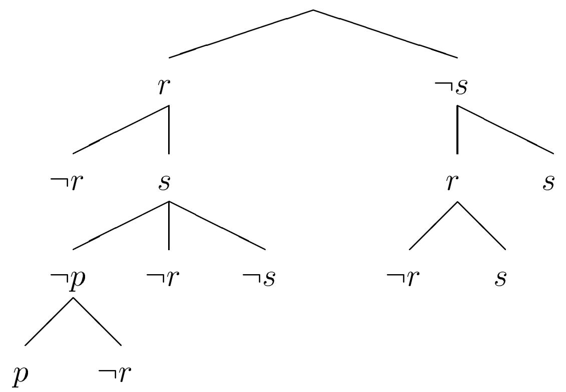
$$F = \ (\neg r \wedge s)$$

von der folgenden Formelmenge S impliziert wird:

$$\{(r \vee s),\ (\neg r \vee s),\ (\neg p \vee \neg r \vee s),\ (p \vee \neg r),\ (\neg p \vee \neg r \vee \neg s)\}.$$

Lösung

Geschlossenes Konnektionstableau für $S \cup \{\ (r \vee \neg s)\ \}$:



(b) (4 Punkte): Geben Sie eine echte Teilmenge von S an, die bereits F impliziert und begründen Sie dies.

Lösung:

$S \setminus \{\ (\neg p \vee \neg r \vee s)\ \}$ (da die Klausel nicht verwendet wurde)

Aufgabe 2: Herbrand-Verfahren für die Prädikatenlogik (10 Punkte)

Gegeben sei die Klauselmenge S bestehend aus den folgenden 5 Klauseln, wobei x, y, z Variablen und a, b, c Konstanten seien:

(1) $\neg P(x, y) \vee \neg P(y, z) \vee P(x, z)$

(2) $\neg P(x, y) \vee P(y, x)$

(3) $P(x, y) \vee \neg Q(y, z, x)$

(4) $Q(a, c, b)$

(5) $\neg P(a, a)$

Geben Sie eine unerfüllbare Klauselmenge S' mit den folgenden Eigenschaften an:

1. Jede Klausel in S' ist variablenfrei.
2. Jede Klausel in S' ist eine Instanz einer Klausel in S, d.h. für jede Klausel $c' \in S'$ gibt es eine Klausel $c \in S$ und eine Substitution σ mit $c' = c\sigma$.
3. S' ist minimal unerfüllbar, d.h. S' ist unerfüllbar und jede echte Teilmenge von S' ist erfüllbar.

Lösung:

$$S' = \{\ \neg P(a, b) \vee \neg P(b, a) \vee P(a, a),\quad \neg P(b, a) \vee P(a, b),\quad P(b, a) \vee \neg Q(a, c, b),\ (4),\ (5)\}$$

Aufgabe 3: Resolution in der Prädikatenlogik (15 Punkte)

(a) (10 Punkte): Gegeben sei die Klauselmenge S, die aus den folgenden 5 Klauseln besteht (Klauseln sind hier als Mengen von Literalen dargestellt, x sei eine Variable, f ein 1-stelliges Funktionszeichen und a eine Konstante):

(1) $\{\neg P(x),\ P(f(f(f(x))))\}$

(2) $\{\neg Q(x),\ Q(f(f(x)))\}$

(3) $\{\neg P(x),\ \neg Q(x)\}$

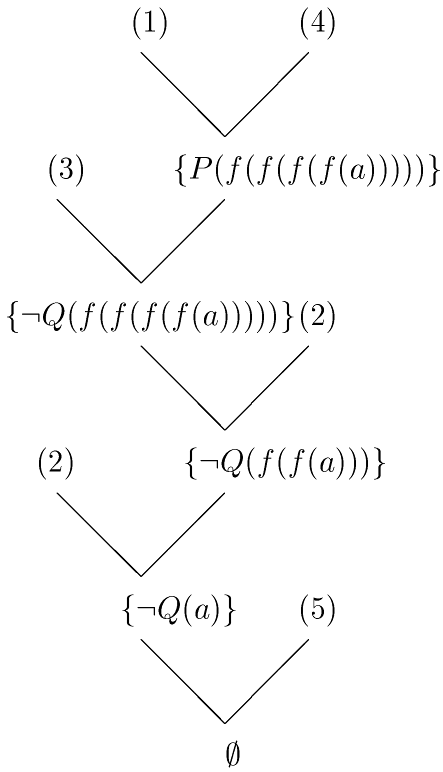
(4) $\{P(f(a))\}$

(5) $\{Q(a)\}$

Wir arbeiten mit einer Resolutionsvariante, die aus den beiden Regeln *Binäre Resolution* und *Faktorisierung* besteht. Ausserdem verwenden wir die sog. *Stützmengen-Resolution*, die wie folgt definiert ist: Die Klauselmenge S wird aufgeteilt in eine sog. Stützmenge S' und eine Hilfsmenge $S \setminus S'$. In jedem Inferenzschritt muss mindestens eine der Elternklauseln aus der Stützmenge sein. Jede neu erzeugte Klausel kommt in die Stützmenge, die damit anwächst.

Geben Sie eine Widerlegung mittels der Stützmengen-Resolution an, wobei die Stützmenge lediglich die Klausel (1) enthalte.

Lösung:



(b) (5 Punkte): Die Stützmengen-Resolution ist nicht für jede Stützmenge vollständig, was offensichtlich ist, z.B. wenn die Stützmenge leer ist. Denn selbst wenn die Eingabemenge unerfüllbar ist, lässt sich ja kein Inferenzschritt ausführen. Wie aber steht es bei nichtleerer Stützmenge? Beantworten Sie dazu die folgende Frage: Ist die Stützmengen-Resolution vollständig für jede beliebige nichtleere Stützmenge? Beweis oder Gegenbeispiel.

Lösung: Die Antwort ist nein. Gegenbeispiel: $\{p, q, \neg q\}$ mit Stützmenge $\{p\}$.

Aufgabe 4: Prädikatenlogische Modelle (15 Punkte)

(a) (10 Punkte): Wir betrachten die Klauselmenge aus Aufgabe 2, aber ohne die Klausel (2):

(1) $\neg P(x,y) \vee \neg P(y,z) \vee P(x,z)$

(3) $P(x,y) \vee \neg Q(y,z,x)$

(4) $Q(a,c,b)$

(5) $\neg P(a,a)$

Geben Sie ein minimales Modell $\langle \mathcal{U}, \iota \rangle$ für diese Klauselmenge an, d.h. ein Modell mit minimalem Universum.

Lösung: Modell $\langle \mathcal{U}, \iota \rangle$, wobei

- $\mathcal{U} = \{a, b\}$
- $\iota(a) = a,\ \iota(b) = b,\ \iota(c) = a$
- $\iota(Q) = \{\langle a, a, b \rangle\}$
- $\iota(P) = \{\langle b, a \rangle\}$

(b) (5 Punkte): Beweisen Sie, dass es kein Modell geben kann, dessen Universum die Mächtigkeit 1 hat.

Lösung: $|\mathcal{U}| = 1$, sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathcal{U} = \{0\}$. Dann muss wegen (5) gelten: $\iota(P) = \emptyset$ und wegen (4): $\iota(Q) = \{\langle 0, 0, 0 \rangle\}$. Damit muss wegen (3) gelten: $\iota(P) = \{\langle 0, 0 \rangle\}$. Widerspruch!